Med@TICE
Université Joseph Fourier Grenoble 1
ETUDES DE SANTÉ
Première Année Commune

www.medatice-grenoble.fr

UE4 : Biostatistiques

Chapitre 2 :
Probabilités

Professeur Philippe CINQUIN

Année universitaire 2011/2012

Plan

C.1 Modèle Probabiliste

- Le modèle probabiliste décrit des expériences (*ou des systèmes*) **aléatoires**,
- … c'est à dire dont le résultat (*ou l'état*) ne peut être prédit avec certitude.
- **Espace probabilisé = triplet (Ω ,a ,P)**
- **Construire successivement :**
  - **l'univers Ω**
  - **la tribu des événements possibles a**
- **la probabilité P**

L'exemple du jet d'un dé cubique

- **1) Construction de l'univers Ω**
  - Associer une épreuve abstraite à une épreuve concrète
    - $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - Dénombrer Ω
- **2) Construire la tribu des événements possibles**
  - caractériser une propriété d'un événement concret
  - **l'événement possible** correspondant est une ***partie*** de Ω : le sous-ensemble de Ω dont les éléments vérifient cette propriété

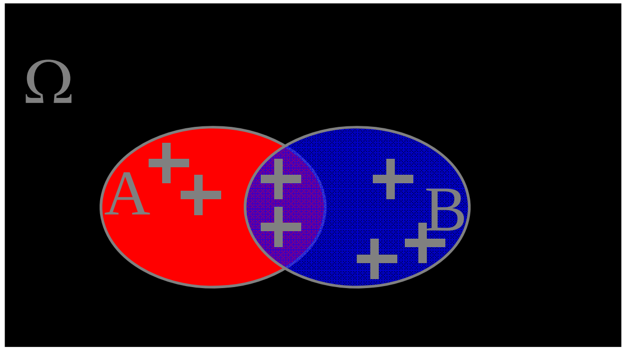
exemple :

l'événement concret ***« une face paire apparaît »***

se traduit par l'événement possible $\{2, 4, 6\}$

3) Construire la loi de probabilité

- événements immédiatement probabilisables (*par exemple, sortie de la face portant le " 6 "*)

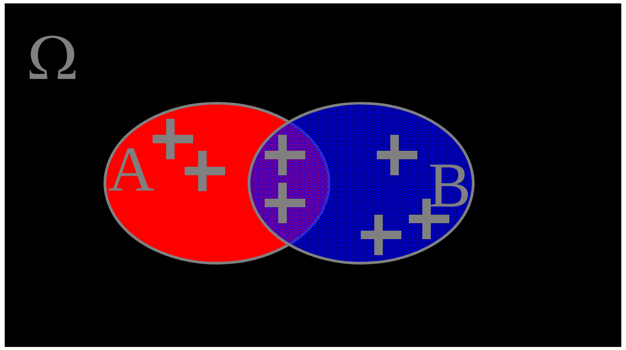


- événements " complexes "
  - $P(\Omega) = 1$
  - $P(A^C) = 1\text{-}P(A)$
  - $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
  - **NB** : $P(A \cap B) = 0$ si $P(A \cap B) = \textbf{Ø}$ (A et B sont disjoints, ou encore incompatibles)

Remarque sur « l'indépendance »

- **Deux événements A et B sont dits « indépendants » si et seulement si**

$$P(A \cap B) = P(A) \, . \, P(B)$$



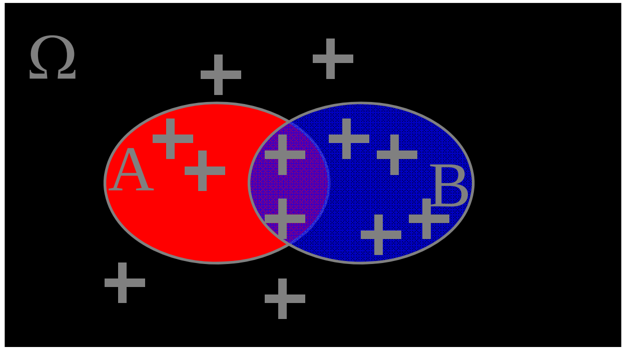
Card (Ω) = 7

Card (A) = 4; p(A) = 4/7

Card (B) = 5; p(B) = 5/7

Card (A ∩ B) = 2; **p(A ∩ B) = 2/7**

p(A) . P(B) = 20/49



Card (Ω) = 12

Card (A) = 4; p(A) = 4/12 = 1/3

Card (B) = 6; p(B) = 6/12 = 1/2

Card (A ∩ B) = 2; **p(A∩B) = 2/12 = 1/6**

p(A) . P(B) = 1/3 x 1/2 = 1/6

Un cas particulier

- **Si**
  - Ω fini ou infini dénombrable
  - tous les “ singletons ” sont immédiatement probabilisables
- **Alors** la plus petite tribu les possédant est l’ensemble des parties de Ω, noté $\mathbf{P}(\Omega)$, et la probabilité d’un événement quelconque est la somme des probabilités des singletons qui le composent.
- Si les singletons sont équi-probables (formule des “ cas favorables ” sur les “ cas possibles ”),

$$P(A) = \text{cardinal}(A)/\text{cardinal}(\Omega)$$

NB dans cette formule P(A) *représente la probabilité de l’événement A, alors que* $\mathbf{P}(\Omega)$ *dénote l’ensemble des parties de* Ω*.*

C.2 Variable aléatoire

- **1 Définition**
  - **Soit (Ω ,a ,P) un espace probabilisé**
  - **X : $\Omega \rightarrow \Re$ est une variable aléatoire si**

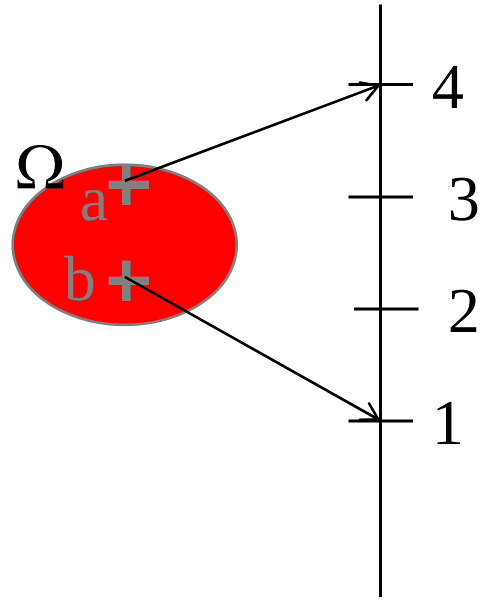
$$\forall\, \mathbf{x} \in \Re,\ \{\omega \in \Omega,\ \mathbf{X}(\omega) \leq \mathbf{x}\ \} \in \mathbf{a}$$

Par exemple, $\Omega =$ **{a, b}** X(a) = 4; X(b)=1

{$\omega \in \Omega$, X(ω) ≤ 5 } = {a, b}

{$\omega \in \Omega$, X(ω) ≤ 3 } = {b}

{$\omega \in \Omega$, X(ω) ≤ 0 } = Ø



- ***NB en pratique, toutes les variables qui nous intéresserons seront des variables aléatoires, vous n'aurez jamais à vérifier cette condition…***

Exemples

- *somme des points obtenus lors du lancer de deux dés cubiques,*
- *nombre de filles dans un ensemble de fratries de 3 enfants,*
- *…*

- En pratique en médecine, toutes les grandeurs biologiques peuvent être considérées comme des variables aléatoires.

- *Intérêt des variables aléatoires : la manipulation de réels est plus facile que la manipulation d'éléments de la tribu* ***a****…*

2 Propriétés des Variables aléatoires

- Soient X et Y deux variables aléatoires. Les variables suivantes sont également des v. a. :
  - $Z = X + Y$
  - $Z = k\,X$ (k réel)
  - $Z = X^n$ (n entier)
  - $Z = XY$

- **3 Comment représenter le lien entre X et P ?**
- *La réponse dépend des caractéristiques de X …*

C.3 Variable Aléatoire discrète

- **Définition**
  - Une v. a. X est **discrète** si l'ensemble des valeurs qu'elle prend est **fini** ou **dénombrable** (on peut indexer ses valeurs par des entiers).

2 Distribution des probabilités d'une v. a. discrète

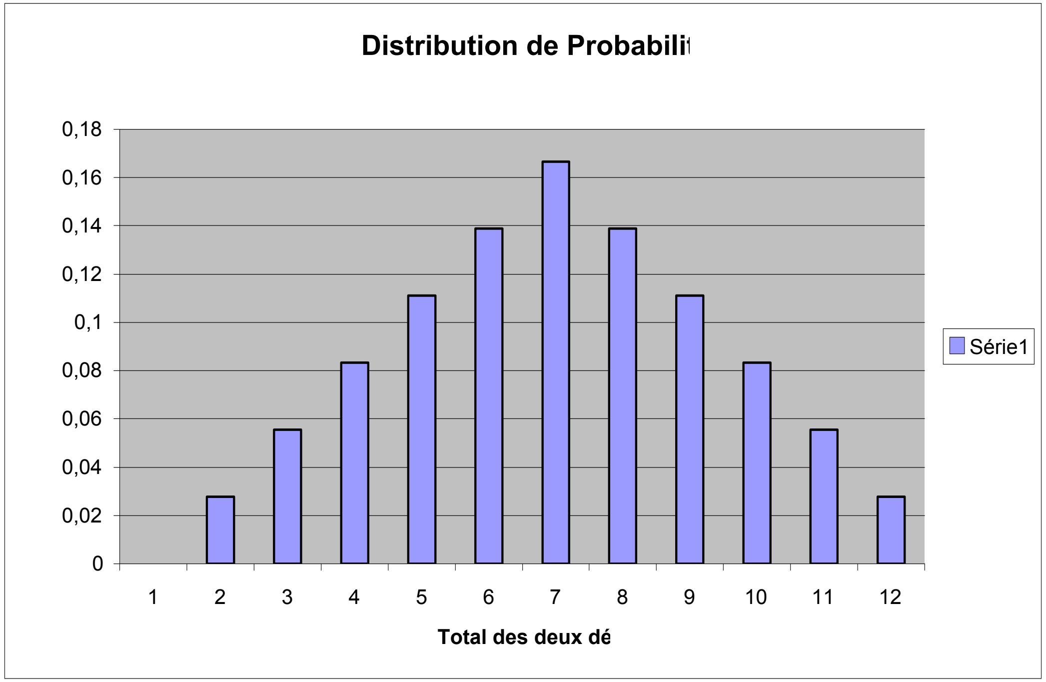
- Soient $\{x_i, i = 1, .., n\}$ les valeurs de X**.**
- **L'expression *$P(X=x_i)$* a un sens.**
- Soit $a_i = \{\omega_k, X(\omega_k) = x_i\}$

- On notera $f(x_i) = P(X=x_i) = P(a_i)$

- ***f* est la fonction de distribution des probabilités de X.**

Exemple : distribution des probabilités de la somme des points obtenus lors du lancer de deux dés cubiques

- Ω = {1, 2, .., 6} X {1, 2, .., 6} =
  {(1,1), (1, 2), .., (1, 6),
  (2,1), (2,2), .., (2, 6),
  …
  (6,1), (6,2), .., (6,6)}
- Card (Ω) = 36
- $X(d_1 , d_2) = d_1 + d_2$
- $\{x_i, i = 1, .., n\} = \{2, 3, …, 12\}$
- Par exemple,
  $a_6 = \{\omega_k, X(\omega_k) = 6\}$ =
  {(1,5), (2,4), (3,3), (4,2), (5,1)}
- $f(6) = P(X=6) = P(a_6)= 5/36 =$
  0.14



3) Paramètres caractérisant la distribution de probabilités d'une variable aléatoire discrète

- Paramètre = grandeur apportant une information résumée sur la loi de distribution d'une variable aléatoire

3.1 Espérance (Moyenne)

- **E(X) =** $\sum p_i x_i$, avec $p_i = P(X=x_i)$

- **Propriétés**
- Si pour tout i, $x_i = k$, alors $E(X) = k$
- $E(X + Y) = E(X) + E(Y)$
- $E(kX) = k\,E(X)$ (k réel)

3.2 Variance - Ecart-type

- **$V(X) = E[(X - E(X))^2]$** $$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

- **Propriétés**
- *Formule de Huyghens*
- $V(X) = E[(X - E(X))^2] = V(X) = E(X^2) - E^2(X)$

- *Pour tout k réel,*
  - $V(X + k) = V(X)$
- $V(kX) = k^2 V(X)$

Remarques

- E(X) et σ ont même “ *dimension* ” que X (ces grandeurs s’expriment numériquement avec la même *unité* que X).

- **L’Espérance est un paramètre de *localisation*.**
- **Variance et Ecart-type sont des paramètres de *dispersion*.**

C.4 Loi Binomiale

- **1 Epreuve de Bernoulli**
  - C'est une épreuve dont le résultat ne présente que deux éventualités incompatibles :
    - **Succès**, de probabilité p,
    - **Echec**, de probabilité q = 1-p

2 Distribution binomiale

- Réaliser n épreuves de Bernoulli :
  - indépendantes
  - p reste constant pendant les n épreuves

- **Le nombre B de succès suit une loi binomiale.**

Exemple : lancers d'une pièce truquée

- Une pièce est truquée. Sa probabilité de tomber sur face est de 0.6. On la lance 3 fois : quelle est la probabilité qu'elle tombe trois fois sur face ?
  - Premier lancer : Probabilité de succès = 0.6
  - Deuxième lancer (indépendant du premier!) : probabilité d'avoir 2 succès = 0.6 x 0.6
  - Troisième lancer (indépendant des deux premiers!) : probabilité d'avoir 3 succès = 0.6 x 0.6 x 0.6 = 0.6^3
- Quelle est la probabilité qu'elle tombe une seule fois sur face ?
  - Choisir le lancer où elle tombera sur Face : 3 possibilités (1er, 2ème, 3ème)
    - La probabilité d'obtenir Face pour le lancer choisi est de 0.6
    - Il faudra également obtenir deux fois de suite Pile, soit une probabilité de 0.4 x 0.4
    - En tout, compte tenu de l'indépendance des lancers, une fois qu'on a choisi le lancer où Face sortira, la probabilité que ce soit bien le seul où Face sortira est de 0.6 x 0.4 x 0.4 = $0.6^1 \times 0.4^2$
    - Et donc la probabilité que la pièce tombe une seule fois sur Face est de $3 \times 0.6^1 \times 0.4^2$

Calcul de la loi de distribution de la loi binomiale

- Si on généralise ce raisonnement, pour obtenir la probabilité d'avoir k succès, il faut :
  - 1) Dénombrer le nombre de manières de choisir les k succès parmi les n lancers
  - 2) Calculer la probabilité d'obtenir les k succès et les(n-k) échecs aux épreuves retenues
- Le premier point correspond à la définition de C_n^k, nombre de combinaisons de k objets pris parmi n :
  - $C_n^k = n! / [k!\,(n-k)!]$ *NB car k et (n-k) jouent des rôles symétriques*
  - NB $C_n^k = C_n^{n-k}$
  - En pratique, commencer la factorielle du numérateur, s'arrêter au k^{ème} terme, puis mettre au dénominateur la factorielle de k, par exemple

$C_{20}^3 = 20! / [3!\ 17!] = 20 \times 19 \times 18 / (3 \times 2)$ *car dans la formule*

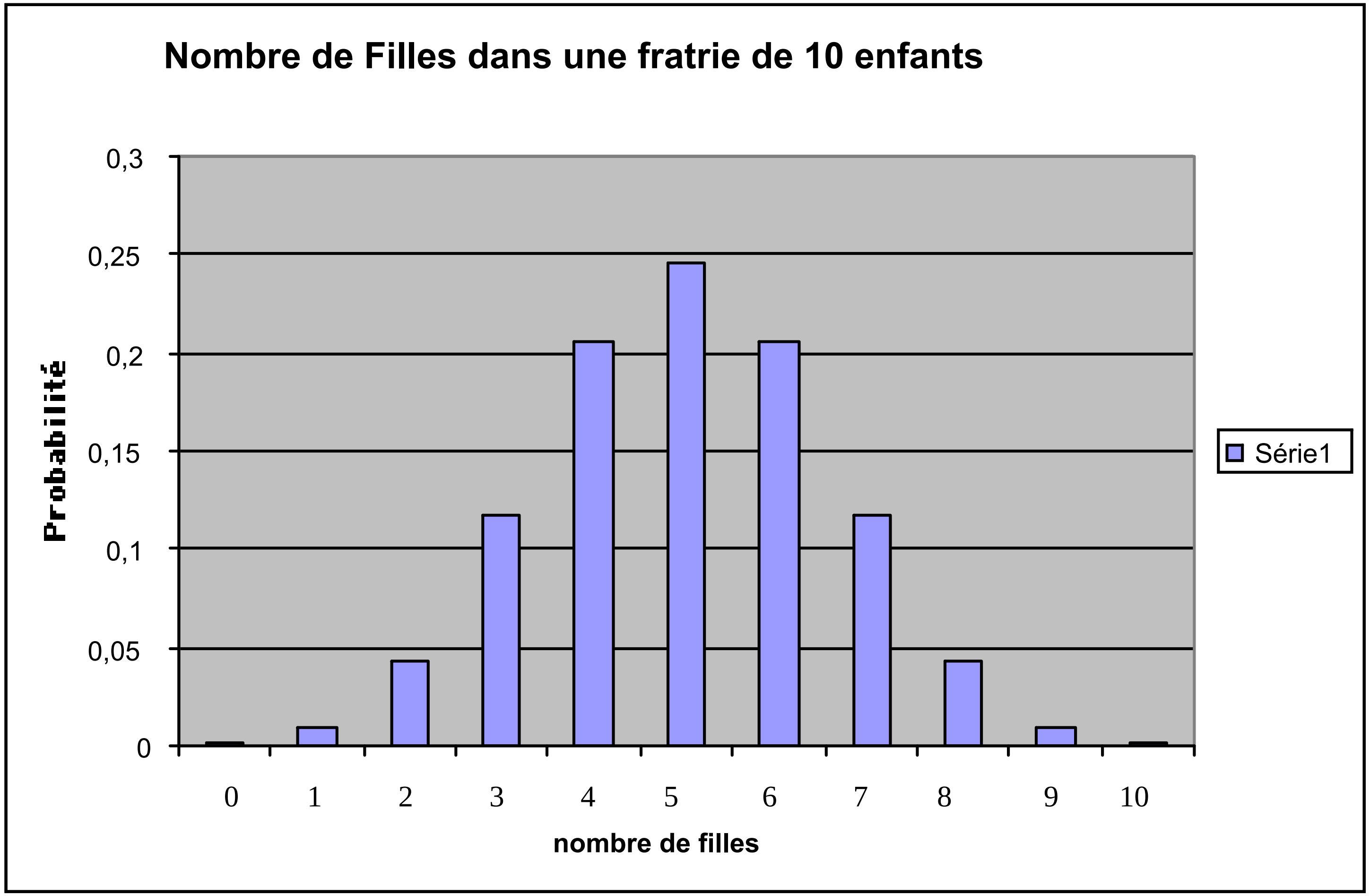
20 x 19 x 18 x 17 x 16 x … x 2 x 1 / [(3 x 2) x (17 x 16 x .. x 2 x 1)]

17! disparaît, puisqu'il se trouve au numérateur ET au dénominateur]

- Pour le deuxième point, compte tenu de l'indépendance des lancers, on obtient $p^k\, q^{(n-k)}$
- Donc **$B_k = P(B=k) = C_n^k\, p^k\, q^{(n-k)}$**

Exemple : nombre de filles dans une fratrie de 10 enfant

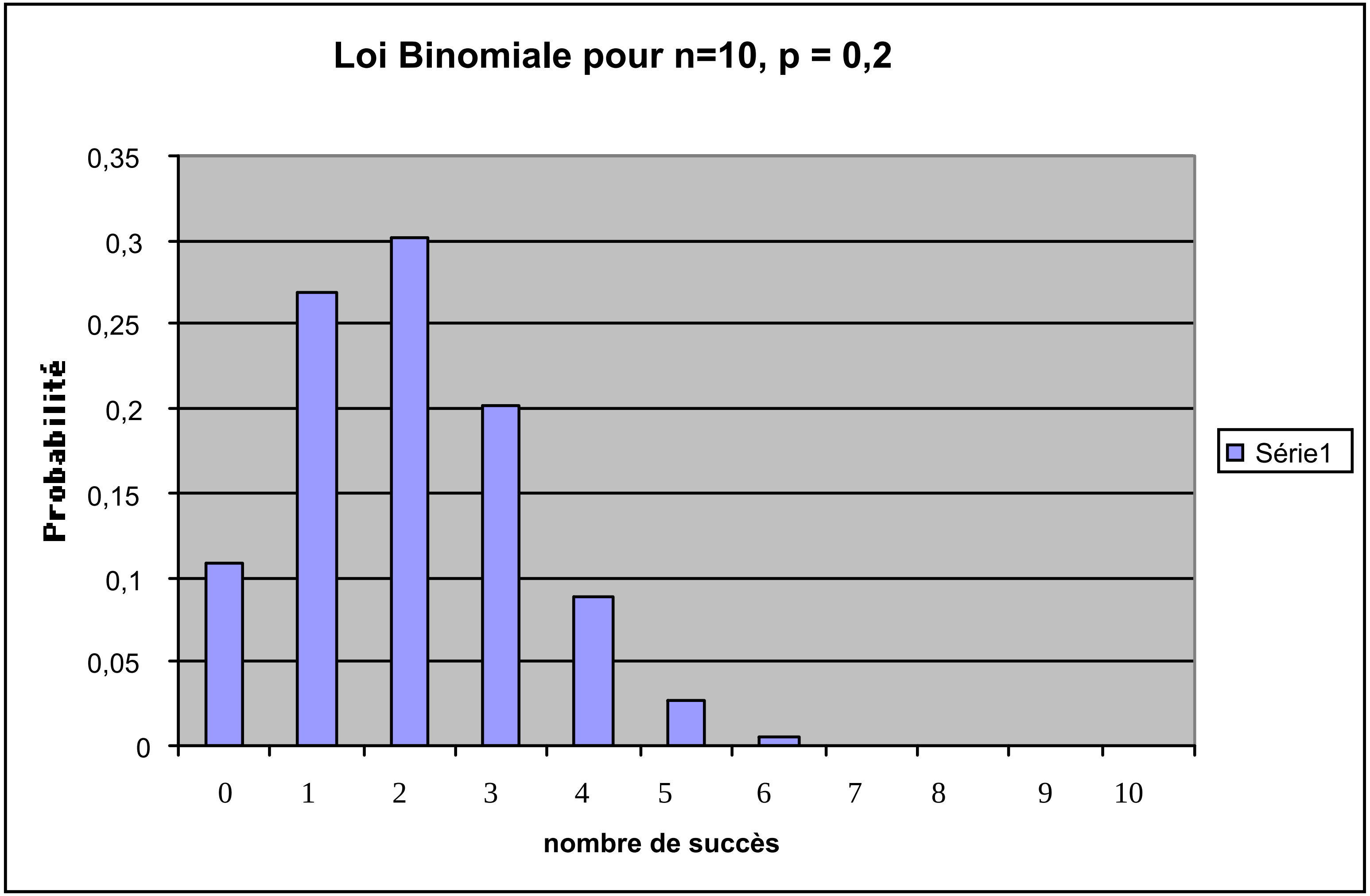
Nombre de filles	Probabilité
0	0,00097656
1	0,00976563
2	0,04394531
3	0,1171875
4	0,20507813
5	0,24609375
6	0,20507813
7	0,1171875
8	0,04394531
9	0,00976563
10	0,00097656

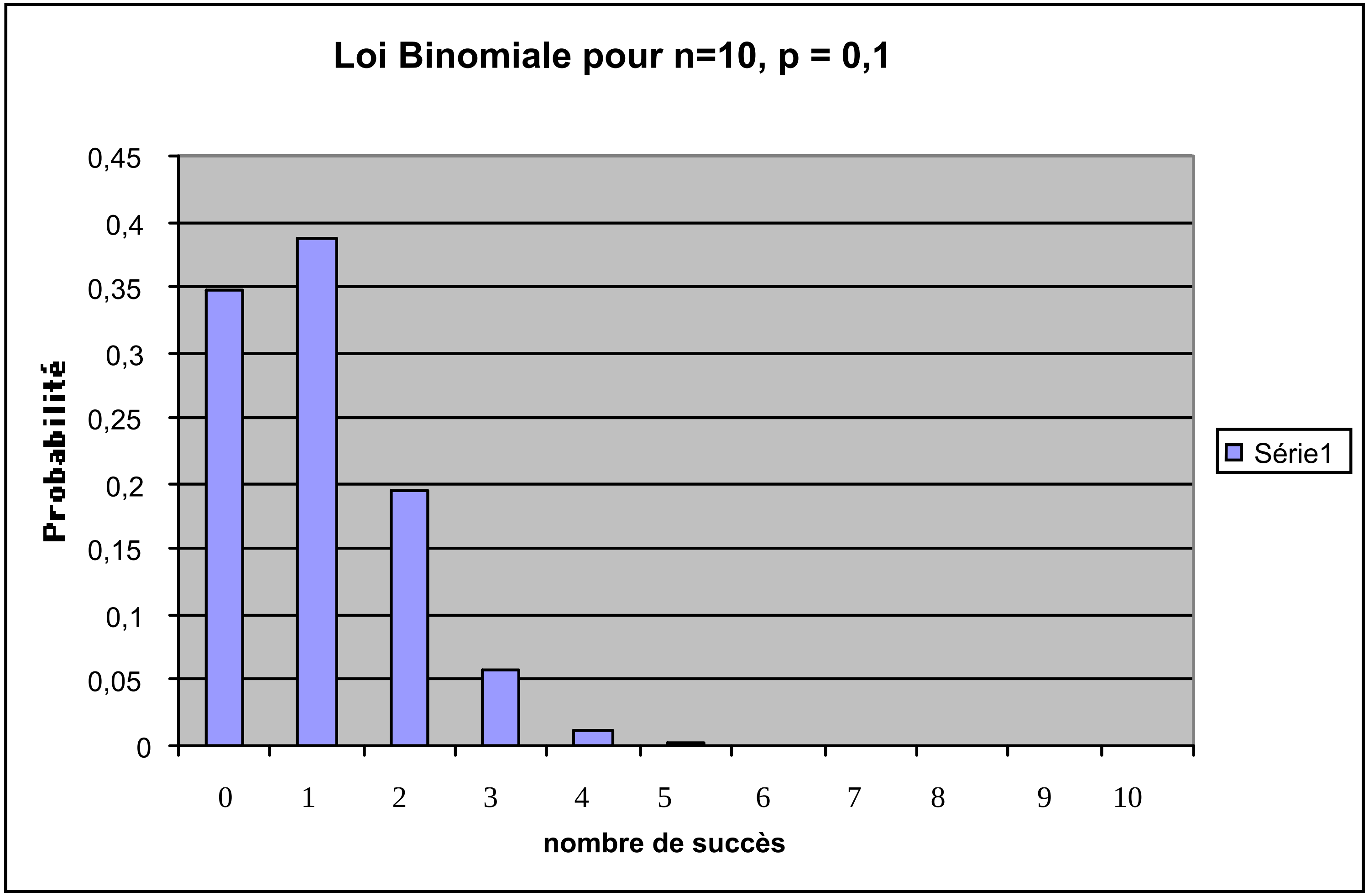


Exemple 2 Transmission dominante (un seul gène suffit) autosomique (non lié au chromosome X ou Y)

- Soit p la probabilité de recevoir un allèle A,
  - q = 1-p la probabilité de recevoir un allèle a.
- La transmission des gènes par les parents suit bien une loi binomiale.
  - L'enfant « tire » deux fois le gène (une fois de son père, une fois de sa mère)
  - Les deux tirages sont indépendants
  - La probabilité de tirer l'allèle A (succès) est constante (p)
- Pour être malade
  - Avoir les 2 gènes (le paternel ET le maternel) porteur de l'allèle a : 0 succès, probabilité = $C_2^0\, p^0 q^2 = q^2$
  - Avoir 1 seul gène porteur de l'allèle a, 1 succès, probabilité = $C_2^1\, pq = 2pq$
  - Soit en tout $2pq + q^2$
- Si q est faible (par exemple 10^{-2}), on peut approximer cette valeur par $2pq = 2 \times 0.99 \times 0.01 = 0.0198$ (≈ 0.02), bonne approximation de $2pq + q^2 = 0.0198 + 0.0001 = 0.0199$

Exemple 3 : allure de la loi de distribution pour p faible





- Si $n \to \infty$ et $p \to 0$, alors que $np \to \lambda$,

alors $C_n^k \, p^k \, q^{(n-k)} \to e^{-\lambda} \, \lambda^k / k!$ On dit que
la loi binomiale tend vers la loi de Poisson.

Loi de Poisson

- Données fictives (non validées par mes collègues physiciens!) :
  - Soit un élément radioactif de masse atomique 131 tel que la probabilité de décomposition en une seconde d'un atome donné soit de $1/(6.02\ 10^{23})$. Calculer la probabilité qu'un détecteur capable de détecter toute décomposition découvre au moins un tel événement en une seconde dans une masse de 131 g composée exclusivement de cet élément (on approximera le nombre d'Avogadro par $6.02\ 10^{23}$).
- On a bien une loi binomiale
  - Chaque seconde, chaque atome « décide » indépendamment de se décomposer; l'expérience est répétée n fois, avec
    - $n = 6.02\ 10^{23}$
    - $p = 1 / (6.02\ 10^{23})$
- Pour répondre à la question, il faut calculer :

$P(B=1) + P(B=2) + P(B=3) + \dots P(B= 6.02\ 10^{23})$

Euh, c'est long…

Loi de Poisson (suite)

- On observe que $np = \lambda = 1$. On est bien dans la situation dite « de la loi de Poisson » : $n \to \infty$ et $p \to 0$, alors que $np \to \lambda$, pour laquelle on peut approximer $C_n^k\, p^k\, q^{(n-k)}$ par $e^{-\lambda}\, \lambda^k / k!$
- Calculons P(B=0)

$$P(B=0) = \left(1 - \frac{1}{6.02 \quad 10^{23}}\right)^{6.02 \quad 10^{23}}$$

  – Que l'on peut approximer par $e^{-\lambda}\, \lambda^k / k! = e^{-1}\, 1^0 / 0! = e^{-1} = 0.37$
- Or,

  $P(B=1) + P(B=2) + P(B=3) + \ldots P(B= 6.02 \quad 10^{23}) = 1 - P(B=0)$
  $= 1 - 0.37 = 0.63$

3 Paramètres de distribution de la loi binomiale

- **E(B) = np**

- **V(B) = npq**

www.medatice-grenoble.fr

Mentions légales

Ce document a été réalisé par la Cellule TICE de la Faculté de Médecine et de Pharmacie de Grenoble
(Université Joseph Fourier – Grenoble 1)