Cours Mathématiques PACES UHP-Nancy

V. Latocha

PACES UHP

septembre 2010

remerciements à D. Schmitt et V. Ries

Nancy-Université
Université
Henri Poincaré

SANTE

CMJN-300dpi

Soient I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une application de I dans $\mathbb{R}$ et a un point de I.

Définition

La fonction f est dite **continue au point a** si et seulement elle admet une limite en ce point et cette limite est $f(a)$

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Définition

On dit qu'une fonction f est **continue sur** I si et seulement si elle est continue en tout point a de I.

à noter

La notion de continuité d'une fonction f a pour objet de traduire mathématiquement le fait que sa courbe représentative peut se tracer sans "lever le crayon".

Propriétés

1. Les fonctions usuelles suivantes sont continues sur tout intervalle où elles sont définies : les fonctions **polynômes**, les fonctions **rationnelles**, la fonction **valeur absolue**, la fonction **sinus**, la fonction **cosinus**.
2. Si u et v sont deux fonctions continues sur I alors $u + v$, $u \times v$ et u^n ($n \in \mathbb{N}$) sont continues sur I et $\frac{u}{v}$ est continue sur les intervalles où elle est définie.
3. Si la fonction f est continue en a et si la fonction g est continue en $f(a)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est continue en a.

Définition

- On dit qu'une fonction f est **dérivable en a** si et seulement si l'une des conditions suivantes est réalisée :
  - le rapport $\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ admet une limite quand h tend vers 0.
  - le rapport $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ admet une limite quand x tend vers a.
- Cette limite est appelée **nombre dérivé de f en a** et notée $f'(a)$.

Définition

- On dit qu'une fonction f est **dérivable sur un intervalle I** si et seulement si elle dérivable en tout point de I et la fonction qui à tout point a de I associe le nombre dérivé de f en a sera appelée **fonction dérivée de f, notée** f'.
- Si la fonction f' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f' est appelée la **dérivée seconde de f et notée** f''.
- Si la fonction f'' est elle-même dérivable sur I, la dérivée de f'' est appelée la **dérivée troisième de f et notée f''' ou $f^{(3)}$**
  et ainsi de suite
- supposons que f possède une dérivée (k-1)-ième $f^{(k-1)}$ où k est un entier, $k \geq 2$. Si $f^{(k-1)}$ est dérivable, alors sa dérivée est appelée **dérivée k-ième de f et notée** $f^{(k)}$ et on a

$$f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et soit $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Tangente

Soit a un point de I. La tangente à la courbe représentative $\mathcal{C}$ de f au point $(a, f(a))$ a pour équation :

$$y = (x - a)f'(a) + f(a).$$

Une première liste

Les fonctions usuelles suivantes sont dérivables sur l'intervalle donné :

fonction f définie par	fonction f' définie par	Intervalle de dérivabilité
$f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$]-\infty; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	$]-\infty; 0[$ et $]0+\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^n} = x^{-n}$	$f'(x) = -nx^{-n-1}$	$]-\infty; 0[$ et $]0+\infty[$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0+\infty[$

Propriétés

1. Soient u et v deux fonctions dérivables sur un intervalle I et k un réel, alors les fonctions $u+v$, ku et uv sont dérivables sur I
2. Si, de plus v ne s'annule pas sur I, alors les fonctions $\frac{1}{v}$ et $\frac{u}{v}$ sont dérivables sur I

et nous avons :

fonction	$u+v$	ku	uv	$\frac{1}{v}$	$\frac{u}{v}$
dérivée	$u'+v'$	ku'	$u'v+uv'$	$-\frac{v'}{v^2}$	$\frac{u'v-uv'}{v^2}$

Théorème

Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I à valeurs dans un intervalle J et si v est une fonction dérivable sur J alors la **fonction composée** $v \circ u$ est dérivable sur I et nous avons

$$(v \circ u)' = u' \times (v' \circ u).$$

Corollaire

1. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I alors u^n avec $n \in \mathbb{N}^*$ est dérivable sur I.
2. Si u est une fonction dérivable sur un intervalle I et si u ne s'annule pas sur I alors les fonctions u^{-n} avec $n \in \mathbb{N}^*$ et $\sqrt{u}$ sont dérivables sur I.

Nous avons :

fonction	u^n	u^{-n}	$\sqrt{u}$
dérivée	$nu'u^{n-1}$	$-nu'u^{-n-1}$	$\frac{u'}{2\sqrt{u}}$

Théorème

Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.

- si la dérivée f' est nulle sur I alors f est **constante sur** I.
- si la dérivée f' est strictement positive sur I, sauf en des valeurs isolées où elle s'annule, alors f est **strictement croissante sur** I.
- si la dérivée f' est strictement négative sur I, sauf en des valeurs isolées où elle s'annule, alors f est **strictement décroissante sur** I.

1. Fonctions d'une variable réelle
    - Rappel sur la continuité
    - Dérivation
    - Fonctions usuelles

Fonctions trigonométriques : la fonction sinus

Ensemble de définition

La fonction sinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$.

Continuité

La fonction sinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Périodicité

La fonction sinus est 2π-périodique i.e.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin(x)$$

On peut donc se borner à étudier la fonction sinus sur un intervalle dont la longueur est égale à cette période, par exemple $[-\pi; \pi]$.
En effet pour construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on commence par la tracer sur $[-\pi; \pi]$, puis ensuite on effectue des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Imparité

La fonction sinus est **impaire** i.e.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin(-x) = -\sin(x)$$

On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $[0; \pi]$.
En effet pour tracer $\mathcal{C}$ sur $[-\pi; \pi]$, il suffira de la tracer sur $[0; \pi]$ et d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'origine 0 du repère.

Quelques valeurs à connaître

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1

Dérivabilité

La fonction sinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \sin'(x) = \cos(x)$$

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{2}$		π
$\sin'(x)$		$+$	0	$-$	
$\sin(x)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	0

Courbe

sur $[0;\pi]$ / sur $[-\pi;0]$ / et le reste

Fonctions trigonométriques : la fonction cosinus

Ensemble de définition

La fonction cosinus est définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $[-1; 1]$.

Continuité

La fonction cosinus est continue sur $\mathbb{R}$.

Périodicité

La fonction cosinus est 2π-périodique i.e.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

On peut donc se borner à étudier la fonction cosinus sur un intervalle dont la longueur est égale à cette période, par exemple $[-\pi; \pi]$.
De nouveau pour construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on commence par la tracer sur $[-\pi; \pi]$, puis ensuite on effectue des translations de vecteur $2k\pi\vec{i}$ ($k \in \mathbb{Z}$).

Parité

La fonction cosinus est **paire** i.e.

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos(-x) = \cos(x)$$

On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $[0;\pi]$.
En effet pour tracer $\mathcal{C}$ sur $[-\pi;\pi]$, il suffira de la tracer sur $[0;\pi]$ et d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées.

Quelques valeurs à connaitre

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\cos(x)$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Dérivabilité

La fonction cosinus est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \cos'(x) = -\sin(x)$$

Tableau de variation

x	0	$\frac{\pi}{2}$	π
$\cos'(x)$	0	$-$	0
$\cos(x)$	1 ↘	0 ↘	-1

Courbe

sur $[0;\pi]$ / sur $[-\pi;0]$ / et le reste

Fonctions trigonométriques : la fonction tangente

Ensemble de définition

La fonction tangente est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$.

Continuité

La fonction tangente est continue sur les intervalles $]-\frac{\pi}{2} + k\pi; \frac{\pi}{2} + k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

Périodicité

La fonction tangente est π-périodique i.e.

$$\text{pour tout } x \neq (\pi/2) + k\pi, \quad \tan(x + \pi) = \tan(x)$$

On peut donc se borner à étudier la fonction tangente sur un intervalle de longueur π, par exemple $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$.
En effet pour construire la courbe représentative $\mathcal{C}$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, on commence par la tracer sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, puis ensuite on effectue des translations de vecteur $k\pi\vec{i}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

Imparité

La fonction tangente est **impaire** i.e.

$$\text{pour tout } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \tan(-x) = -\tan(x)$$

On peut donc restreindre l'intervalle d'étude de la fonction à l'intervalle $[0; \frac{\pi}{2}[$.
En effet pour tracer $\mathcal{C}$ sur $]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, il suffira de la tracer sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et d'effectuer ensuite une symétrie par rapport à l'origine 0 du repère.

Quelques valeurs à connaitre

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\tan(x)$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	$\times$

Dérivabilité

La fonction tangente est dérivable sur tout intervalle où elle est définie et

$$\text{pour tout } x \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, \quad \tan'(x) = 1 + \tan^2(x) = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

Tableau de variation

x	0		$\frac{\pi}{4}$		$\frac{\pi}{2}$
$\tan'(x)$			$+$		$\|$
$\tan(x)$	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	$+\infty$ $\|$

Courbe

sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ / sur $]-\frac{\pi}{2}; 0]$ / et le reste

quelques formules trigonométriques à connaître

pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1.$

Formules d'addition

Pour tout couple (a,b) de nombres réels,

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b),$$

$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b),$$

$$\sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b),$$

$$\sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b),$$

Théorème de la bijection

- Si f est une fonction **continue** et **strictement monotone** sur l'intervalle $[a; b]$ $(a < b)$, alors pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = y$ admet une **unique solution** dans $[a; b]$.
- On dit que alors que f est une **bijection de** $[a; b]$ **sur** $[f(a); f(b)]$ ou $[f(b); f(a)]$ selon que f est croissante ou décroissante.

Fonction réciproque

Soit f est une fonction bijective de l'intervalle I sur l'intervalle J.

- il existe une unique fonction définie sur J à valeurs dans I appelée **fonction réciproque** et notée f^{-1} telle que

$$\text{pour tout } x \in I, \quad f^{-1} \circ f(x) = x,$$

$$\text{pour tout } y \in J, \quad f \circ f^{-1}(y) = y.$$

- $y = f(x)$ si et seulement si $f^{-1}(y) = x$.

Tracé de la courbe représentative

La courbe représentative $\mathcal{C}_{f^{-1}}$ de f^{-1} se déduit de $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f par une symétrie par rapport à la première bissectrice $(y = x)$.

La fonction exponentielle

Définition

- Il existe une unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que $f' = f$ et $f(0) = 1$.
- On appelle **exponentielle** cette fonction et on note $f(x) = \exp(x)$.

Propriétés

- La fonction exponentielle est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad \exp'(x) = \exp(x)$$

Propriété fondamentale

Quels que soient les réels a et b

$$\exp(a+b) = \exp(a) \times \exp(b).$$

Remarque

La fonction exponentielle est l'unique fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$, non nulle telle que

$$f(a+b) = f(a) \times f(b) \quad \text{et} \quad f'(0) = 1.$$

Définition

L'image de 1 par la fonction exponentielle est notée e, i.e. $e = \exp(1)$.

$$e \simeq 2,718.$$

Propriétés

1. Quels que soient les réels a et b

$$\exp(-a) = \frac{1}{\exp(a)}, \quad \exp(a-b) = \frac{\exp(a)}{\exp(b)}.$$

2. Quels que soient le réel a et l'entier n

$$\exp(na) = (\exp(a))^n.$$

3. Quel que soit le réel a

$$\exp(a) > 0.$$

Limites

1. $\lim_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty,$
2. $\lim_{x \to -\infty} \exp(x) = 0,$

Quelques limites utiles à connaitre

1. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\exp(h) - 1}{h} = 1.$
2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\exp(x)}{x} = +\infty,$
3. $\lim_{x \to -\infty} x \exp(x) = 0.$

Tableau de variation

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\exp'(x)$		$+$	
$\exp(x)$	0	1	$+\infty$

Courbe

tracé sur $\mathbb{R}$