La fonction logarithme népérien

La fonction exponentielle est continue strictement croissante sur $\mathbb{R}$ à valeurs dans $]0; +\infty[$. Elle définit donc une bijection de $\mathbb{R}$ sur $]0; +\infty[$, c'est-à-dire que quel que soit le réel strictement positif x, l'équation d'inconnue y,

$$\exp(y) = x$$

admet une unique solution dans $\mathbb{R}$.

Définition

- On appelle **logarithme népérien** la fonction réciproque de la fonction exponentielle.
- Le logarithme népérien du réel strictement positif x est l'unique solution de l'équation d'inconnue y : $\exp(y) = x$. On le note $\ln(x)$.

Remarque

Par définition, nous avons

$$\ln(1) = 0 \quad \text{et} \quad \ln(e) = 1.$$

Propriétés

- La fonction logarithme népérien est définie sur $]0; +\infty[$,
- La fonction logarithme népérien est continue sur $]0; +\infty[$,
- La fonction logarithme népérien est dérivable sur $]0; +\infty[$ et

$$\text{pour tout } x \in]0; +\infty[, \quad \ln'(x) = \frac{1}{x}.$$

Propriété fondamentale

Quels que soient les réels strictement positifs a et b

$$\ln(a \times b) = \ln(a) + \ln(b).$$

Propriétés

1. Quels que soient les réels strictement positifs a et b

$$\ln\frac{1}{b} = -\ln(b), \quad \ln\frac{a}{b} = \ln(a) - \ln(b).$$

2. Quels que soient le réel a et l'entier n

$$\ln(a^n) = n\ln(a).$$

Limites

1. $\lim_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty,$
2. $\lim_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty.$

Quelques limites utiles à connaitre

1. $\lim_{h \to 0} \dfrac{\ln(1+h)}{h} = 1,$
2. $\lim_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0,$
3. $\lim_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0.$

Tableau de variation

x	0		1		$+\infty$
$\ln'(x)$	$\Vert$		$+$		
$\ln(x)$	$\Vert$	$-\infty$	$\nearrow$ 0	$\nearrow$	$+\infty$

Courbe

tracé sur $\mathbb{R}_*^+$

Soit a un réel strictement positif. Lorsque $\frac{p}{q}$ est un nombre rationnel positif ($p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$) on a

$$b = a^{\frac{p}{q}} = \sqrt[q]{a^p} \Longleftrightarrow b^q = a^p$$

d'où

$$\ln(b^q) = q \ln(b) = p \ln(a)$$

soit

$$\ln(b) = \ln(a^{\frac{p}{q}}) = \frac{p}{q} \ln(a)$$

et

$$\ln(a^{-\frac{p}{q}}) = \ln(\frac{1}{a^{\frac{p}{q}}}) = -\ln(a^{\frac{p}{q}}) = -\frac{p}{q} \ln(a)$$

Ainsi, pour tout nombre rationnel x on a

$$\ln(a^x) = x \ln(a)$$

Soit encore

$$a^x = \exp(x \ln(a)).$$

Lorsque x est un nombre réel (et non plus nécessairement un nombre rationnel), le membre de droite de cette dernière égalité garde un sens :

Définition

Soit a un réel strictement positif. Pour tout nombre réel x, on pose

$$a^x := \exp\left(x \ln\left(a\right)\right).$$

Remarque

En particulier pour $a = e$, on obtient

$$e^x = \exp\left(x\right).$$

On emploiera donc indifféremment les notations e^x et $\exp\left(x\right)$.

Exponentielle de base a

Définition

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.

- la fonction $x \mapsto a^x = \exp(x \ln(a))$ est appelée **fonction exponentielle de base** a.
- la fonction exponentielle $x \mapsto e^x = \exp(x)$ est donc la fonction exponentielle de base e.

Propriétés

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$.

- La fonction exponentielle de base a est définie sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle de base a est continue sur $\mathbb{R}$.
- La fonction exponentielle de base a est dérivable sur $\mathbb{R}$ et

$$\text{pour tout } x \in \mathbb{R}, \quad (a^x)' = (\exp(x \ln(a)))' = \ln(a) a^x$$

Propriétés

Soit a un réel strictement positif, $a \neq 1$. Quels que soient les réels x et y

$$a^{x+y} = a^x \times a^y, \quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}, \quad a^{x-y} = \frac{a^x}{a^y},$$

$$(a^x)^y = a^{xy}.$$

Limites

1. si $a > 1$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = 0.$$

2. si $0 < a < 1$ alors

$$\lim_{x \to +\infty} a^x = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \to -\infty} a^x = +\infty.$$

Variations

1. si $a > 1$ alors la fonction exponentielle de base a est croissante.
2. si $0 < a < 1$ alors la fonction exponentielle de base a est décroissante.

Courbe

tracé dans les deux cas.

Les fonctions puissances

Définition

Soit m un nombre réel donné.
La fonction $x \mapsto x^m = e^{m \ln(x)}$ définie pour tout réel strictement positif x est appelée **fonction puissance d'exposant** m.

Propriétés

- Les fonctions puissances sont définies sur $]0;+\infty[$,
- La fonction puissances sont continues sur $]0;+\infty[$,
- La fonction puissances sont dérivables sur $]0;+\infty[$ et

$$\text{pour tout } x \in]0;+\infty[, \quad (x^m)' = mx^{m-1}.$$

Propriétés

1. Soit m un nombre réel donné. Quels que soient les réels strictement positifs x et y

$$(xy)^m = x^m.y^m, \quad x^{-m} = \frac{1}{x^m}, \quad \left(\frac{x}{y}\right)^m = \frac{x^m}{y^m}.$$

2. Soit m et p deux nombres réels donnés. Quel que soit le réel strictement positifs x

$$x^{m+p} = x^m x^p, \quad (x^m)^p = x^{mp}.$$

Tableau de variation

Il y a cinq cas : $m > 1$, $m = 1$, $0 < m < 1$, $m = 0$ et $m < 0$

Courbes

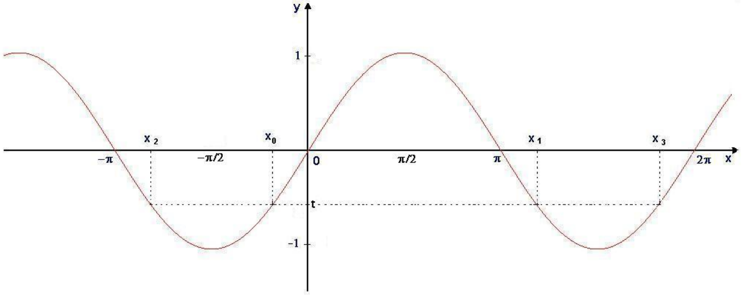
exercice : tracer les cinq courbes

Fonction circulaires réciproques

Pour tout réel t de l'intervalle [-1,+1],

l'équation $\quad \sin(x) = t$

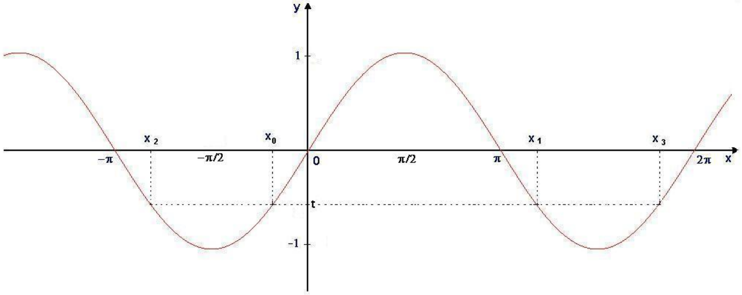
admet une infinité de solutions :



Pour tout réel t de l'intervalle [-1,+1],

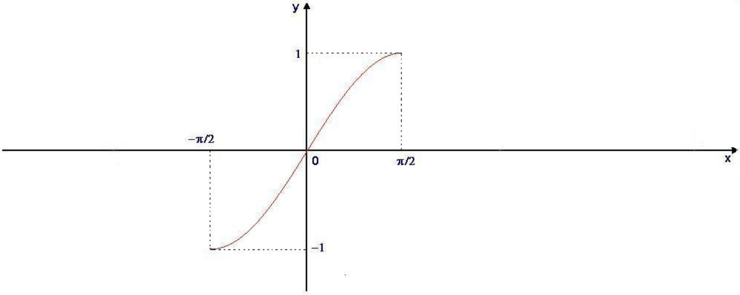
l'équation $\quad \sin(x) = t$

admet une infinité de solutions :

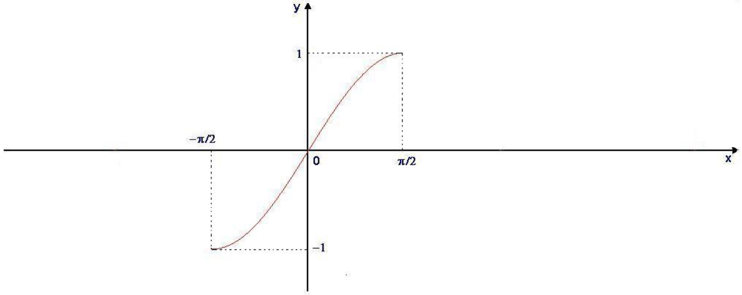


mais une et une seule appartient à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ (ici : x_0).

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de cet intervalle sur [-1,+1] :



La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de cet intervalle sur [-1,+1] :



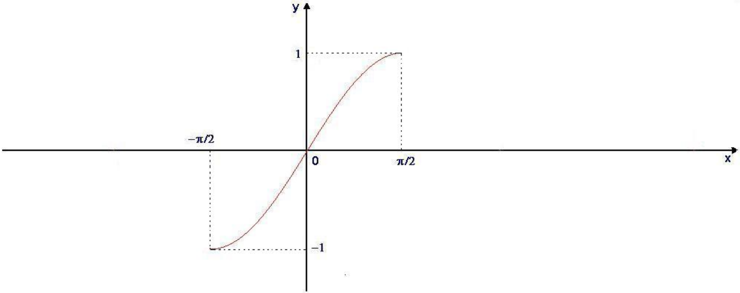
La réciproque de cette bijection s'appelle arcsinus et se note arcsin.

Définition

arcsin est la fonction définie sur [-1,+1] par

$$\arcsin(y) = x \iff$$

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de cet intervalle sur [-1,+1] :



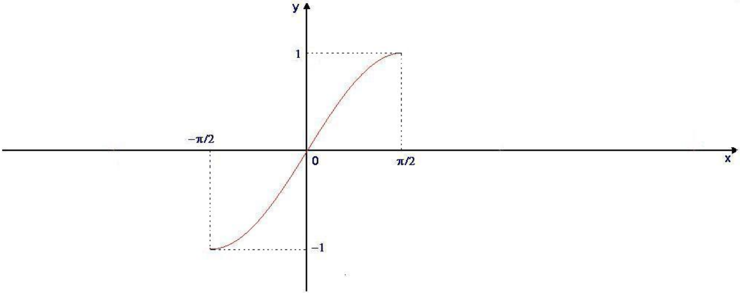
La réciproque de cette bijection s'appelle arcsinus et se note arcsin.

Définition

arcsin est la fonction définie sur [-1,+1] par

$$\arcsin(y) = x \iff \Big(\sin(x) = y$$

La restriction à $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ de la fonction sinus est une bijection de cet intervalle sur [-1,+1] :



La réciproque de cette bijection s'appelle arcsinus et se note arcsin.

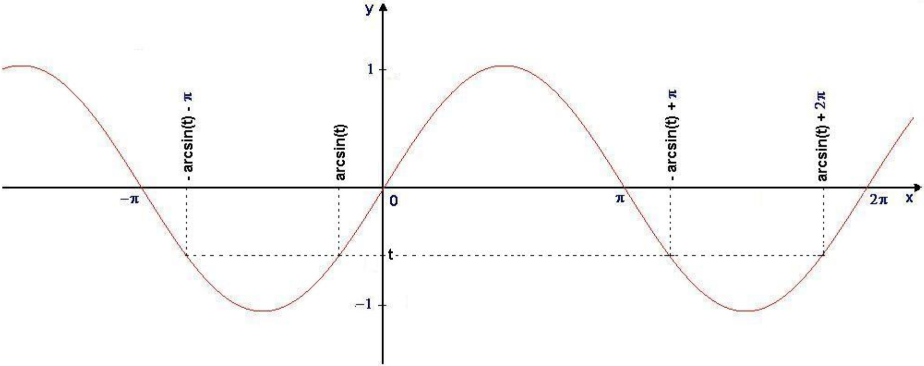
Définition

arcsin est la fonction définie sur [-1,+1] par

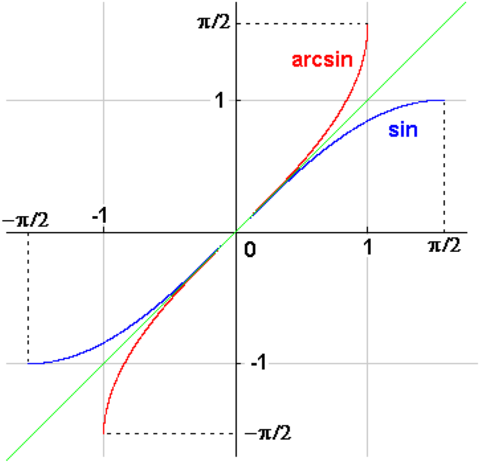
$$\arcsin(y) = x \iff \left(\sin(x) = y \quad \text{et} \quad x \in [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]\right)$$

Pour tout réel t de l'intervalle [-1,+1], les solutions de l'équation $\sin(x) = t$ peuvent toutes s'exprimer en fonction de $\arcsin(t)$:

Pour tout réel t de l'intervalle [-1,+1], les solutions de l'équation $\sin(x) = t$ peuvent toutes s'exprimer en fonction de arcsin(t) :



La fonction arcsinus est strictement croissante de [-1,+1] sur $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$. En axes orthonormés sa représentation et celle de la restriction de la fonction sinus à l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$
- par dérivation, $\cos(\arcsin(y))\arcsin'(y) = 1$

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$
- par dérivation, $\cos(\arcsin(y))\arcsin'(y) = 1$
- si $y \in$]-1,+1[, $\cos(\arcsin(y)) > 0$ car alors $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$
- par dérivation, $\cos(\arcsin(y))\arcsin'(y) = 1$
- si $y \in$]-1,+1[, $\cos(\arcsin(y)) > 0$ car alors $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Donc, si $y \in$]-1,+1[,

- $\cos(\arcsin(y)) = +\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y))^2} = \sqrt{1-y^2}$

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$
- par dérivation, $\cos(\arcsin(y)) \arcsin'(y) = 1$
- si $y \in$]-1,+1[, $\cos(\arcsin(y)) > 0$ car alors $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Donc, si $y \in$]-1,+1[,

- $\cos(\arcsin(y)) = +\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y))^2} = \sqrt{1-y^2}$
- $\sqrt{1-y^2} \arcsin'(y) = 1$

La fonction arcsinus est continue sur [-1,+1].
Elle est même dérivable sur]-1,+1[.
Calculons sa dérivée :

- $\sin(\arcsin(y)) = y$
- par dérivation, $\cos(\arcsin(y))\arcsin'(y) = 1$
- si $y \in$]-1,+1[, $\cos(\arcsin(y)) > 0$ car alors $\arcsin(y) \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$

Donc, si $y \in$]-1,+1[,

- $\cos(\arcsin(y)) = +\sqrt{1-(\sin(\arcsin(y))^2} = \sqrt{1-y^2}$
- $\sqrt{1-y^2}\arcsin'(y) = 1$

Formule à mémoriser

$$\arcsin'(y) = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

De même, la restriction à $[0, \pi]$ de la fonction cosinus est une bijection de $[0, \pi]$ sur [-1,+1].

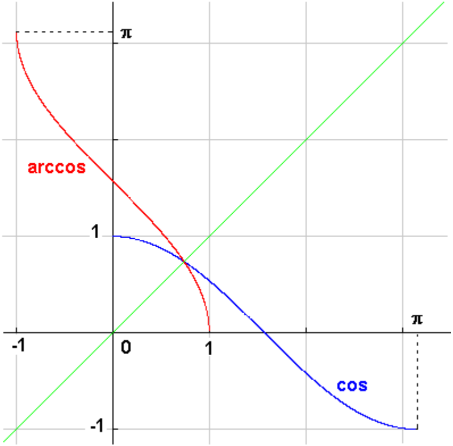
Cette bijection admet une réciproque qu'on nomme arccosinus et qu'on note arccos.

Définition

arccos est la fonction définie sur [-1,+1] par

$$\arccos(x) = y \iff \Big(\cos(y) = x \quad \text{et} \quad y \in [0, \pi]\Big)$$

La fonction arccosinus est strictement décroissante de [-1,+1] sur $[0, \pi]$. En axes orthonormés, sa courbe représentative et celle de la restriction de cosinus à l'intervalle $[0, \pi]$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.

Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Vérifions-le par le calcul en fixant arbitrairement un réel y de [-1,+1] :

Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Vérifions-le par le calcul en fixant arbitrairement un réel y de [-1,+1] :

- pour tout réel z, $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$

Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Vérifions-le par le calcul en fixant arbitrairement un réel y de [-1,+1] :

- pour tout réel z, $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- en particulier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(y)\right) = \sin\left(\arcsin(y)\right) = y$

Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées. Vérifions-le par le calcul en fixant arbitrairement un réel y de [-1,+1] :

- pour tout réel z, $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- en particulier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(y)\right) = \sin\left(\arcsin(y)\right) = y$
- donc, par définition même de arccosinus, $\frac{\pi}{2} - \arcsin(y) = \arccos(y)$

Les fonctions arccosinus et arcsinus sont très liées : leurs représentations graphiques semblent même être symétriques l'une de l'autre par rapport à l'axe des ordonnées.
Vérifions-le par le calcul en fixant arbitrairement un réel y de [-1,+1] :

- pour tout réel z, $\cos(\frac{\pi}{2} - z) = \sin(z)$
- en particulier $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \arcsin(y)\right) = \sin\left(\arcsin(y)\right) = y$
- donc, par définition même de arccosinus, $\frac{\pi}{2} - \arcsin(y) = \arccos(y)$

Il en résulte que, comme la fonction arcsinus, la fonction arccosinus est continue sur [-1,+1] et dérivable sur]-1,+1[et que

$$\arccos'(y) = -\arcsin'(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

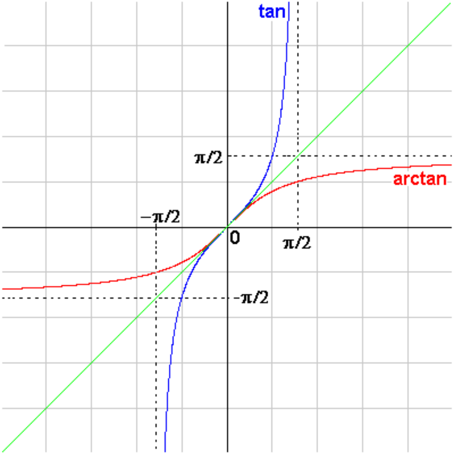
Enfin, la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ est une bijection de cet intervalle sur $]-\infty, +\infty[$.
Cette bijection admet une réciproque qu'on nomme arctangente et qu'on note arctan.

Définition

arctan est la fonction définie sur $]-\infty, +\infty[$ par

$$\arctan(x) = y \iff \left(\tan(y) = x \quad \text{et} \quad y \in]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[\right)$$

La fonction arctangente est strictement croissante de $]-\infty, +\infty[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$. En axes orthonormés, sa représentation et celle de la restriction de la fonction tangente à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}[$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice :



La fonction arctangente est continue
et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.
Calculons sa dérivée :

La fonction arctangente est continue et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.
Calculons sa dérivée :

- $\tan(\arctan(y)) = y$

La fonction arctangente est continue
et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.
Calculons sa dérivée :

- $\tan(\arctan(y)) = y$
- par dérivation, $\big(1 + \tan^2(\arctan(y))\big) \arctan'(y) = 1$

La fonction arctangente est continue
et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.
Calculons sa dérivée :

- $\tan(\arctan(y)) = y$
- par dérivation, $\big(1 + \tan^2(\arctan(y))\big) \arctan'(y) = 1$
- donc $(1 + y^2) \arctan'(y) = 1$

La fonction arctangente est continue
et dérivable sur $]-\infty, +\infty[$.
Calculons sa dérivée :

- $\tan(\arctan(y)) = y$
- par dérivation, $\left(1 + \tan^2(\arctan(y)\right) \arctan'(y) = 1$
- donc $(1 + y^2) \arctan'(y) = 1$

Formule à mémoriser

$$\arctan'(y) = \frac{1}{1 + y^2}$$

Formule de Taylor et applications

La présence dans un calcul - formel ou numérique - d'une fonction f un peu particulière (cf arctangente) rend parfois ce calcul compliqué, voire impossible.

La présence dans un calcul - formel
ou numérique - d'une fonction f
un peu particulière (cf arctangente)
rend parfois ce calcul compliqué,
voire impossible.

Si l'on peut se contenter d'un résultat approché de ce calcul, une idée naturelle consiste à y remplacer la fonction f par une autre fonction g.

La présence dans un calcul - formel
ou numérique - d'une fonction f
un peu particulière (cf arctangente)
rend parfois ce calcul compliqué,
voire impossible.

Si l'on peut se contenter d'un résultat approché de ce calcul, une idée naturelle consiste à y remplacer la fonction f par une autre fonction g.

Il faudra évidemment que cette nouvelle fonction g soit à la fois

La présence dans un calcul - formel
ou numérique - d'une fonction f
un peu particulière (cf arctangente)
rend parfois ce calcul compliqué,
voire impossible.

Si l'on peut se contenter d'un résultat approché de ce calcul, une idée naturelle consiste à y remplacer la fonction f par une autre fonction g.

Il faudra évidemment que cette nouvelle fonction g soit à la fois

- suffisamment simple - une fonction polynomiale par exemple - pour que le calcul avec g devienne facile ou pour le moins "faisable"

La présence dans un calcul - formel
ou numérique - d'une fonction f
un peu particulière (cf arctangente)
rend parfois ce calcul compliqué,
voire impossible.

Si l'on peut se contenter d'un résultat approché de ce calcul, une idée naturelle consiste à y remplacer la fonction f par une autre fonction g.

Il faudra évidemment que cette nouvelle fonction g soit à la fois

- suffisamment simple - une fonction polynomiale par exemple - pour que le calcul avec g devienne facile ou pour le moins "faisable"
- suffisamment voisine de f pour que l'erreur commise en remplaçant f par g soit acceptable.

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$(1-x)(1+x+\cdots+x^n) \quad = \quad (1+x+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1})$$

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n)-(x+x^2+\cdots+x^{n+1})\\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1}) \\ &= 1 - x^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
et on peut donc remplacer la fonction f par la fonction polynomiale

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n)-(x+x^2+\cdots+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$, $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
et on peut donc remplacer la fonction f par la fonction polynomiale

$$g_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

tout au moins pour les valeurs de x pour lesquelles l'écart $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
entre $f(x)$ et $g_n(x)$ est négligeable

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
et on peut donc remplacer la fonction f par la fonction polynomiale

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

tout au moins pour les valeurs de x pour lesquelles l'écart $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
entre $f(x)$ et $g_n(x)$ est négligeable

- ce qui est évidemment le cas si x est voisin de 0

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n) - (x+x^2+\cdots+x^{n+1}) \\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

Ainsi, si $x \neq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
et on peut donc remplacer la fonction f par la fonction polynomiale

$$g_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$$

tout au moins pour les valeurs de x pour lesquelles l'écart $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$ entre $f(x)$ et $g_n(x)$ est négligeable

- ce qui est évidemment le cas si x est voisin de 0
- surtout si n est grand

Un exemple pour fixer les idées : $f(x) = \dfrac{1}{1-x}$.

Pour tout entier naturel n et tout réel x,

$$\begin{aligned}(1-x)(1+x+\cdots+x^n) &= (1+x+\cdots+x^n)-(x+x^2+\cdots+x^{n+1})\\ &= 1-x^{n+1}\end{aligned}$$

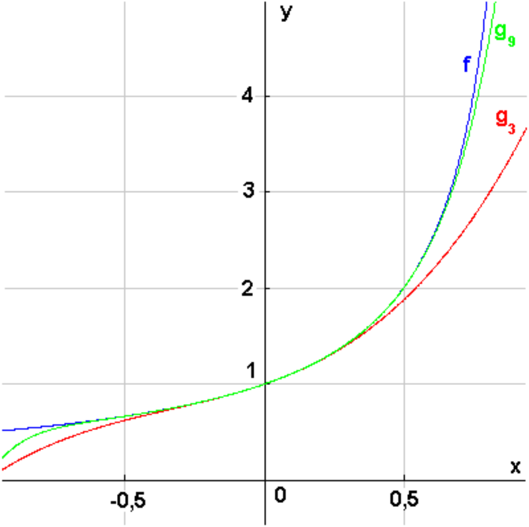
Ainsi, si $x \neq 1$, $\quad \dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
et on peut donc remplacer la fonction f par la fonction polynomiale

$$g_n(x) = 1+x+x^2+\cdots+x^n$$

tout au moins pour les valeurs de x pour lesquelles l'écart $\dfrac{x^{n+1}}{1-x}$
entre $f(x)$ et $g_n(x)$ est négligeable

- ce qui est évidemment le cas si x est voisin de 0
- surtout si n est grand
- mais n'est plus du tout le cas si x est loin de 0 :

$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad g_9(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$$



$$f(x) = \frac{1}{1-x} \quad g_3(x) = 1 + x + x^2 + x^3 \quad g_9(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^9$$