On dit que la fonction f de l'exemple précédent "admet un développement limité d'ordre n en 0".

On dit que la fonction f de l'exemple précédent "admet un développement limité d'ordre n en 0".

Plus généralement :

Définition

Soit h une fonction définie sur un intervalle I, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. S'il existe

- un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n
- une fonction β définie sur I et de limite nulle en a

tels que

$$(\forall x \in I) \quad h(x) = p_n(x) + (x-a)^n \beta(x)$$

on dit que $p_n(x)$ est un développement limité d'ordre n de $h(x)$ au point a.

On dit que la fonction f de l'exemple précédent "admet un développement limité d'ordre n en 0".

Plus généralement :

Définition

Soit h une fonction définie sur un intervalle I, $n \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. S'il existe

- un polynôme p_n de degré inférieur ou égal à n
- une fonction β définie sur I et de limite nulle en a

tels que

$$(\forall x \in I) \quad h(x) = p_n(x) + (x-a)^n \beta(x)$$

on dit que $p_n(x)$ est un développement limité d'ordre n de $h(x)$ au point a.

Dans l'exemple précédent, avec $I =]-\infty, +1[$ et $a = 0$:
$p_n(x) = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n$ et $\beta(x) = \dfrac{x}{1-x}$.

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.
Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

Les deux théorèmes suivants (admis) répondent en partie à cette question.

Formule de Mac Laurin

Soit F une fonction réelle définie sur un intervalle J contenant 0 et possédant des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

Les deux théorèmes suivants (admis) répondent en partie à cette question.

Formule de Mac Laurin

Soit F une fonction réelle définie sur un intervalle J contenant 0 et possédant des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

Alors, pour tout t dans J, $\qquad F(t) = P_n(t) + t^n \alpha(t)$

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

Les deux théorèmes suivants (admis) répondent en partie à cette question.

Formule de Mac Laurin

Soit F une fonction réelle définie sur un intervalle J contenant 0 et possédant des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

Alors, pour tout t dans J, $\quad F(t) = P_n(t) + t^n\alpha(t) \quad$ où

- $P_n(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\dfrac{t^2}{2!} + \cdots + F^{(n)}(0)\dfrac{t^n}{n!}$

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

Les deux théorèmes suivants (admis) répondent en partie à cette question.

Formule de Mac Laurin

Soit F une fonction réelle définie sur un intervalle J contenant 0 et possédant des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

Alors, pour tout t dans J, $\quad F(t) = P_n(t) + t^n \alpha(t) \quad$ où

- $P_n(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\dfrac{t^2}{2!} + \cdots + F^{(n)}(0)\dfrac{t^n}{n!}$
- $\lim\limits_{t \to 0} \alpha(t) = 0$

C'est une astuce de calcul qui a permis de trouver un développement limité en 0 de la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$.

Mais comment obtenir un développement limité dans le cas général ?

Les deux théorèmes suivants (admis) répondent en partie à cette question.

Formule de Mac Laurin

Soit F une fonction réelle définie sur un intervalle J contenant 0 et possédant des dérivées en 0 jusqu'à l'ordre n.

Alors, pour tout t dans J, $\qquad F(t) = P_n(t) + t^n\alpha(t) \qquad$ où

- $P_n(t) = F(0) + F'(0)t + F''(0)\dfrac{t^2}{2!} + \cdots + F^{(n)}(0)\dfrac{t^n}{n!}$
- $\lim\limits_{t \to 0} \alpha(t) = 0$

Remarque

Si n n'est pas trop petit, le "reste" $t^n\alpha(t)$ - souvent noté $o(t^n)$ - tend très vite vers 0 quand t tend vers 0 puisque t^n tend lui-même vite vers 0.

Le théorème précédent se généralise
facilement en posant $f(x) = F(x-a)$
où a est un réel quelconque :

Formule de Taylor

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I contenant a et possédant des dérivées en a jusqu'à l'ordre n. Alors, pour tout x dans I,

$$f(x) = p_n(x) + (x-a)^n \beta(x) \qquad \text{où}$$

- $p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$
- $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$

Le théorème précédent se généralise
facilement en posant $f(x) = F(x - a)$
où a est un réel quelconque :

Formule de Taylor

Soit f une fonction réelle définie sur un intervalle I contenant a et possédant des dérivées en a jusqu'à l'ordre n. Alors, pour tout x dans I,

$$f(x) = p_n(x) + (x-a)^n \beta(x) \qquad \text{où}$$

- $p_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + f''(a)\dfrac{(x-a)^2}{2!} + \cdots + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!}$
- $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$

Remarques

- $p_n(x)$ est bien un polynôme en x
- le reste $(x-a)^n\beta(x)$ tend rapidement vers 0 quand x tend vers a

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, pour tout x de I,

- $f(x) = f(a) + 0 + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\beta(x) \quad$ où $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, pour tout x de I,

- $f(x) = f(a) + 0 + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\beta(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$
- donc $f(x) - f(a) = (x-a)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + \beta(x)\right)$ où $\beta(x)$ est négligeable devant $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si x est suffisamment voisin de a.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, pour tout x de I,

- $f(x) = f(a) + 0 + f^{(n)}(a)\dfrac{(x-a)^n}{n!} + (x-a)^n\beta(x)$ où $\lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$
- donc $f(x) - f(a) = (x-a)^n\left(\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} + \beta(x)\right)$ où $\beta(x)$ est négligeable devant $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si x est suffisamment voisin de a.

Il en résulte que, au voisinage de a,

$f(x) - f(a)$ a le même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$
  - si $f^{(n)}(a) > 0$, alors $f(x) > f(a)$ au voisinage de a donc f admet un minimum local en a

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$
  - si $f^{(n)}(a) > 0$, alors $f(x) > f(a)$ au voisinage de a donc f admet un minimum local en a
  - si $f^{(n)}(a) < 0$, alors $f(x) < f(a)$ au voisinage de a donc f admet un maximum local en a.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$
  - si $f^{(n)}(a) > 0$, alors $f(x) > f(a)$ au voisinage de a donc f admet un minimum local en a
  - si $f^{(n)}(a) < 0$, alors $f(x) < f(a)$ au voisinage de a donc f admet un maximum local en a.
- Si n est impair, alors $(x-a)^n$ change de signe en a.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$
  - si $f^{(n)}(a) > 0$, alors $f(x) > f(a)$ au voisinage de a donc f admet un minimum local en a
  - si $f^{(n)}(a) < 0$, alors $f(x) < f(a)$ au voisinage de a donc f admet un maximum local en a.
- Si n est impair, alors $(x-a)^n$ change de signe en a.
  Il en va de même pour $(x-a)^n f^{(n)}(a)$ et donc aussi pour $f(x) - f(a)$.

Application à la recherche d'extrema

Soit f une fonction définie et n fois dérivable sur un intervalle I ($n \geqslant 2$). Supposons qu'il existe dans I un réel a tel que

- $f'(a) = \cdots = f^{(n-1)}(a) = 0$
- $f^{(n)}(a) \neq 0$

Alors, au voisinage de a, $f(x) - f(a)$ a même signe que $(x-a)^n f^{(n)}(a)$.

- Si n est pair, $f(x) - f(a)$ a le même signe que $f^{(n)}(a)$
  - si $f^{(n)}(a) > 0$, alors $f(x) > f(a)$ au voisinage de a donc f admet un minimum local en a
  - si $f^{(n)}(a) < 0$, alors $f(x) < f(a)$ au voisinage de a donc f admet un maximum local en a.
- Si n est impair, alors $(x-a)^n$ change de signe en a.
  Il en va de même pour $(x-a)^n f^{(n)}(a)$ et donc aussi pour $f(x) - f(a)$.
  Par conséquent, f n'admet pas d'extremum local en a.

Application au calcul d'erreur

Soit a la valeur mesurée d'un paramètre réel auquel on doit appliquer une fonction f.
Si x est la valeur exacte de ce paramètre, comment l'éventuelle erreur de mesure influe-t-elle sur la valeur prise par la fonction ?

Application au calcul d'erreur

Soit a la valeur mesurée d'un paramètre réel
auquel on doit appliquer une fonction f.
Si x est la valeur exacte de ce paramètre,
comment l'éventuelle erreur de mesure
influe-t-elle sur la valeur prise par la fonction ?
Autrement dit, que peut-on dire de $f(x) - f(a)$?

Application au calcul d'erreur

Soit a la valeur mesurée d'un paramètre réel auquel on doit appliquer une fonction f.
Si x est la valeur exacte de ce paramètre, comment l'éventuelle erreur de mesure influe-t-elle sur la valeur prise par la fonction ?
Autrement dit, que peut-on dire de $f(x) - f(a)$?
Si f est définie et n fois dérivable sur un intervalle contenant a et x, on peut lui appliquer la formule de Taylor :

$$f(x)-f(a) = (x-a)f'(a)+\cdots+(x-a)^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}+(x-a)^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!}+\beta(x)\right)$$

où $\beta(x)$ est négligeable devant $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si l'erreur de mesure $x-a$ est suffisamment voisine de 0

Application au calcul d'erreur (suite)

En notant h l'erreur de mesure ($h = x - a$),
la formule de Taylor précédente s'écrit :

$$f(x) - f(a) = hf'(a) + \cdots + h^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + h^n\Big(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \gamma(h)\Big)$$

où $\gamma(h)$ est négligeable devant $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si h est suffisamment petit.

Application au calcul d'erreur (suite)

En notant h l'erreur de mesure ($h = x - a$),
la formule de Taylor précédente s'écrit :

$$f(x) - f(a) = hf'(a) + \cdots + h^{n-1}\frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!} + h^n\left(\frac{f^{(n)}(a)}{n!} + \gamma(h)\right)$$

où $\gamma(h)$ est négligeable devant $\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ si h est suffisamment petit.

Ainsi, si l'erreur de mesure h est suffisamment petite,

$$f(x) - f(a) \approx hf'(a) + h^2\frac{f''(a)}{2!} + \cdots + h^n\frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

Application au calcul d'erreur (fin)

- l'inégalité "triangulaire" appliquée à l'approximation précédente de l'erreur induite $f(x) - f(a)$ donne :

$$|f(x) - f(a)| \lesssim |h||f'(a)| + |h|^2 \frac{|f''(a)|}{2!} + \cdots + |h|^n \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

Application au calcul d'erreur (fin)

- l'inégalité "triangulaire" appliquée
  à l'approximation précédente de
  l'erreur induite $f(x) - f(a)$ donne :

$$|f(x) - f(a)| \lesssim |h||f'(a)| + |h|^2 \frac{|f''(a)|}{2!} + \cdots + |h|^n \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

- On ne connaît évidemment pas la valeur exacte de l'erreur de mesure h mais la connaissance de l'instrument de mesure permet en général d'encadrer cette erreur par une "incertitude" :
  $-\epsilon \leqslant h \leqslant \epsilon$ ou $|h| \leqslant \epsilon$

Application au calcul d'erreur (fin)

- l'inégalité "triangulaire" appliquée à l'approximation précédente de l'erreur induite $f(x) - f(a)$ donne :

$$|f(x) - f(a)| \lesssim |h||f'(a)| + |h|^2 \frac{|f''(a)|}{2!} + \cdots + |h|^n \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

- On ne connaît évidemment pas la valeur exacte de l'erreur de mesure h mais la connaissance de l'instrument de mesure permet en général d'encadrer cette erreur par une "incertitude" :
$$-\epsilon \leqslant h \leqslant \epsilon \quad \text{ou} \quad |h| \leqslant \epsilon$$

Ainsi, si l'incertitude ϵ sur la mesure de x est suffisamment petite,

$$|f(x) - f(a)| \lesssim \epsilon|f'(a)| + \epsilon^2 \frac{|f''(a)|}{2!} + \cdots + \epsilon^n \frac{|f^{(n)}(a)|}{n!}$$

Développements limités

On a vu que les formules de Mac Laurin
et de Taylor constituaient un moyen simple
pour obtenir des développements limités,
leur seul inconvénient étant de nécessiter
le calcul de plusieurs dérivées successives.

On a vu que les formules de Mac Laurin
et de Taylor constituaient un moyen simple
pour obtenir des développements limités,
leur seul inconvénient étant de nécessiter
le calcul de plusieurs dérivées successives.

On verra qu'en pratique, il suffit d'appliquer ces formules à quelques fonctions usuelles comme

$$(1+x)^\alpha, \quad \ln(1-x), \quad e^x, \quad \tan(x), \quad \arcsin(x)\dots$$

pour en déduire des développements limités de nombreuses autres fonctions.

On a vu que les formules de Mac Laurin
et de Taylor constituaient un moyen simple
pour obtenir des développements limités,
leur seul inconvénient étant de nécessiter
le calcul de plusieurs dérivées successives.

On verra qu'en pratique, il suffit d'appliquer ces formules à quelques fonctions usuelles comme

$$(1+x)^\alpha, \quad \ln(1-x), \quad e^x, \quad \tan(x), \quad \arcsin(x)\ldots$$

pour en déduire des développements limités de nombreuses autres fonctions.

Mais donnons d'abord les développements limités en 0 de ces fonctions usuelles.

Développements limités en 0 à connaître

e^x	$1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$
$\ln(1-x)$	$-x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \cdots - \frac{x^n}{n} + o(x^n)$
$\sin(x)$	$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + o(x^{2n+2})$
$\cos(x)$	$1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + o(x^{2n+1})$
$\arcsin(x)$	$x + \frac{x^3}{6} + \frac{3x^5}{40} \cdots + \frac{1\times3\times\cdots\times(2n-1)x^{2n+1}}{2\times4\times\cdots\times(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$\arctan(x)$	$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} + o(x^{2n+2})$
$(1+x)^\alpha \quad (\alpha\in\mathbb{R})$	$1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)x^2}{2} + \cdots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)x^n}{n!} + o(x^n)$

Développement limité d'une somme
Développement limité d'un produit

Soit p_n et q_n des développements limités d'ordre n en a de deux fonctions f et g :

- $f(x) = p_n(x) + (x-a)^n\alpha(x)$ où $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$
- $g(x) = q_n(x) + (x-a)^n\beta(x)$ où $\lim_{x\to a} \beta(x) = 0$

Développement limité d'une somme
Développement limité d'un produit

Soit p_n et q_n des développements limités d'ordre n en a de deux fonctions f et g :

- $f(x) = p_n(x) + (x-a)^n \alpha(x) \qquad$ où $\qquad \lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$
- $g(x) = q_n(x) + (x-a)^n \beta(x) \qquad$ où $\qquad \lim\limits_{x \to a} \beta(x) = 0$

Alors

$$(f+g)(x) = p_n(x) + q_n(x) + (x-a)^n \gamma(x)$$

$$\text{où} \qquad \lim_{x \to a} \gamma(x) = \lim_{x \to a} \big(\alpha(x) + \beta(x)\big) = 0$$

Développement limité d'une somme
Développement limité d'un produit

Soit p_n et q_n des développements limités d'ordre n en a de deux fonctions f et g :

- $f(x) = p_n(x) + (x-a)^n\alpha(x)$ où $\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0$
- $g(x) = q_n(x) + (x-a)^n\beta(x)$ où $\lim_{x\to a} \beta(x) = 0$

Alors
$$(f+g)(x) = p_n(x) + q_n(x) + (x-a)^n\gamma(x)$$
$$\text{où} \qquad \lim_{x\to a} \gamma(x) = \lim_{x\to a} \big(\alpha(x) + \beta(x)\big) = 0$$

donc $p_n + q_n$ est un développement limité d'ordre n en a de $f+g$.

De même, le polynôme obtenu en ne conservant du produit p_nq_n que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de fg.

Développement limité de la composée de deux fonctions

- Si p_n est un développement limité d'ordre n en a de f
- si q_n est un développement limité d'ordre n en $f(a)$ de g

alors le polynôme $r_n(x)$ obtenu en ne conservant de $q_n\big(p_n(x)\big)$ que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de $g \circ f$.

Développement limité de la composée de deux fonctions

- Si p_n est un développement limité d'ordre n en a de f
- si q_n est un développement limité d'ordre n en $f(a)$ de g

alors le polynôme $r_n(x)$ obtenu en ne conservant de $q_n\big(p_n(x)\big)$ que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de $g \circ f$.

En particulier, en choisissant $a = 0$ et $f(x) = \lambda x$:

- si $q_n(x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x)$
- alors $q_n(\lambda x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(\lambda x)$.

Développement limité de la composée de deux fonctions

- Si p_n est un développement limité d'ordre n en a de f
- si q_n est un développement limité d'ordre n en $f(a)$ de g

alors le polynôme $r_n(x)$ obtenu en ne conservant de $q_n\big(p_n(x)\big)$ que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de $g \circ f$.

En particulier, en choisissant $a = 0$ et $f(x) = \lambda x$:

- si $q_n(x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x)$
- alors $q_n(\lambda x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(\lambda x)$.

Par exemple, si $\lambda = -1$,

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)$$

Développement limité de la composée de deux fonctions

- Si p_n est un développement limité d'ordre n en a de f
- si q_n est un développement limité d'ordre n en $f(a)$ de g

alors le polynôme $r_n(x)$ obtenu en ne conservant de $q_n\big(p_n(x)\big)$ que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de $g \circ f$.

De même, en choisissant $a = 0$ et $f(x) = x - b$:

- si $q_n(x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x)$
- alors $q_n(x - b)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x - b)$ dont on peut déduire des développements limités en b.

Développement limité de la composée de deux fonctions

- Si p_n est un développement limité d'ordre n en a de f
- si q_n est un développement limité d'ordre n en $f(a)$ de g

alors le polynôme $r_n(x)$ obtenu en ne conservant de $q_n\big(p_n(x)\big)$ que les monômes de degrés inférieurs ou égaux à n est un développement limité d'ordre n en a de $g \circ f$.

De même, en choisissant $a = 0$ et $f(x) = x - b$:

- si $q_n(x)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x)$
- alors $q_n(x - b)$ est un développement limité d'ordre n en 0 de $g(x - b)$ dont on peut déduire des développements limités en b.

Exemple : développements limités en 1 de $\ln(x)$ et e^x

$$\ln(x)=\ln\Big(1+(x-1)\Big)=(x-1)-\frac{(x-1)^2}{2}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{(x-1)^n}{n}+o\Big((x-1)^n\Big)$$

$$e^x=e.e^{x-1}=e+e(x-1)+e\frac{(x-1)^2}{2!}+\cdots+e\frac{(x-1)^n}{n}+o\Big((x-1)^n\Big)$$