Fonctions de plusieurs variables

V. Latocha

PACES UHP

septembre 2010

Plan du chapitre

Au lieu d'avoir une fonction d'une variable réelle :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ x &\mapsto f(x) = \sin(x) \text{ par exemple} \end{aligned}$$

on se propose d'examiner des fonctions de *plusieurs* variables, par exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = x^2 + y^2 \end{aligned}$$

On utilise souvent la notation suivante :

$$\begin{aligned}
\mathbb{R}^2 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}\} \\
\mathbb{R}^3 &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{(x, y, z),\ x \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R},\ z \in \mathbb{R}\} \\
\mathbb{R}^n &= \mathbb{R} \times \mathbb{R} \cdots \times \mathbb{R} = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_1 \in \mathbb{R},\ x_2 \in \mathbb{R},\ \ldots x_n \in \mathbb{R}\}
\end{aligned}$$

Par exemple :

$$\begin{aligned}
(1.2,\ 2.3) &\in \mathbb{R}^2 \\
(e,\ \pi) &\in \mathbb{R}^2 \\
(2,\ e,\ \pi) &\in \mathbb{R}^3
\end{aligned}$$

On peut représenter graphiquement les éléments de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Domaine de définition

Considérons par exemple :

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

Comme pour les fonctions d'une seule variable, on se demande :

- quel est le domaine de définition de cette fonction ?
- comment l'écrire ?

Ici, on va devoir décrire un sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$.

Examinons un exemple :

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} &\rightarrow \mathbb{R} \\ (x, y) &\mapsto f(x, y) = \ln(x + y) \end{aligned}$$

Pour que cette fonction soit définie, il faut et il suffit que $x + y > 0$. Par conséquent, le domaine de définition de f s'écrit :

$$D = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2, \, x + y > 0\right\} \tag{1}$$

On peut représenter ce domaine dans le plan (x, y).

Continuité

Il faudrait introduire des notions nouvelles pour définir la continuité d'une fonction de plusieurs variables.
Mais on peut :

- donner une définition et l'utiliser pour prouver la continuité de fonctions usuelles ;
- combiner les résultats (somme, produit, quotient, composée, ...).

De nouveau, on examine

$$\begin{array}{rcl} f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

Comme pour les fonctions d'une seule variable, on veut connaître la sensibilité de f à une variation de x ou y.
On introduit alors les quantités (qui ont un sens sous certaines hypothèses sur f) :

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x, y) & = & \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x + h,\ y) - f(x, y)}{h} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x, y) & = & \displaystyle\lim_{h \to 0} \frac{f(x,\ y + h) - f(x, y)}{h} \end{array}$$

On les appelle les dérivées partielles par rapport à x (resp. y) de f, prises au point (x, y).

Ceci revient à considérer les fonctions :

$$\begin{aligned} f_y : x &\mapsto f(x,y) \\ f_x : y &\mapsto f(x,y) \end{aligned}$$

et ainsi :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= f_y'(x) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= f_x'(y) \end{aligned}$$

c'est-à-dire que l'on calcule les dérivées partielles ≪ comme d'habitude ≫, en considérant une variable seulement, les autres variables étant considérées comme de simples constantes.

Différentiabilité

De même que pour la continuité, on devrait mettre en place de nouvelles notions pour parler de cette notion. On peut retenir :

- qu'il s'agit de l'extension de la notion de dérivabilité, au cas où l'on examine une fonction de plusieurs variables ;
- que nous ne manipulerons que des fonctions différentiables ;
- qu'une fonction différentiable admet des dérivées partielles par rapport à chacune de ses variables (rq : la réciproque n'est pas vraie).

Exemples

$$\begin{aligned}
f_1(x,y) &= x^2y^3 \\
f_2(x,y) &= 5x^2y^3 \\
f_3(x,y) &= x^2+y^2 \\
f_4(x,y) &= \sin(x^2+y^2) \\
f_5(x,y) &= \exp(x)\sin(y) \\
f_6(x,y,z) &= x^2+y^2+z^2 \\
f_7(x,y,z) &= xyz
\end{aligned}$$

Combinaisons

De par sa définition, on a ainsi :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(kf) &= k\frac{\partial f}{\partial x} \text{ (où k est une constante)} \\
\frac{\partial}{\partial x}(f+g) &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial x}(fg) &= \frac{\partial f}{\partial x}\, g + f\, \frac{\partial g}{\partial x} \\
\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f}{g}\right) &= \frac{g\,\frac{\partial f}{\partial x} - f\,\frac{\partial g}{\partial x}}{g^2}
\end{aligned}$$

et de même pour n'importe quelle variable $(\frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}, \ldots)$.

Composée de fonctions

On rappelle que, pour $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alors :

$$(f \circ g)'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

On peut énoncer un résultat semblable lorsque $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Par exemple, si

$$\begin{array}{rcl} g : \mathbb{R} \times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & g(x, y) \end{array}$$

alors (on donne le résultat pour $\frac{\partial}{\partial x}$ mais il est identique pour $\frac{\partial}{\partial y}$) :

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \circ g)(x, y) \quad = \quad f'(g(x, y)) \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x, y).$$

(Par contre, la situation où $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^p$ et $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ est très différente.)

Différentielle d'une fonction

Définition

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. On suppose que f est différentiable au point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$. On appelle différentielle de f au point (x_0, y_0) l'application :

$$\begin{array}{rcl} D_{(x_0,y_0)}f : \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (h_x, h_y) & \mapsto & D_{(x_0,y_0)}f(h_x, h_y) \end{array}$$

avec $D_{(x_0,y_0)}f(h_x, h_y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_y$.

Exemple : $f(x, y) = x^3 y$.

Remarque : cette définition s'étend de manière évidente aux fonctions $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, etc.

Pourquoi cette définition ?

- Lorsque $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, on avait $f(x+h) - f(x) \approx f'(x) \cdot h$;
- La différentielle reprend cette idée. Si on se donne $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors on a :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_x; y_0 + h_y) - f(x_0, y_0) &\approx D_{(x_0,y_0)} f(h_x, h_y) \\ &\approx \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_y . \end{aligned}$$

Gradient d'une fonction

Dans certains cas, il est plus facile d'utiliser les dérivées partielles comme si c'était les coordonnées d'un vecteur.

Gradient d'une fonction

Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction à 2 variables, que l'on suppose différentiable. Alors le gradient de f en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ est le vecteur à 2 composantes :

$$\text{grad } f(x_0,\, y_0) \;=\; \nabla f(x_0,\, y_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \end{pmatrix}$$

Cette définition s'étend de manière évidente aux fonctions $f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f_3 : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$, etc.

Mesures physiques

- Beaucoup de grandeurs mesurées se *déduisent* d'autres mesures. Ex : $U = RI$ donne $R = U/I$ et l'on peut mesurer U et I.
- Dans cet exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ (U, I) & \mapsto & R \end{array}$$

- Que se passe-t-il si U et I sont connues à une incertitude près (ex : $U \pm \Delta U$) ?

$\hookrightarrow$ souhait d'évaluer la sensibilité de $f(U, I)$ par rapport à $U, \Delta U, I, \Delta I$.

Mesures physiques

- Beaucoup de grandeurs mesurées se *déduisent* d'autres mesures. Ex : $U = RI$ donne $R = U/I$ et l'on peut mesurer U et I.
- Dans cet exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (U, I) & \mapsto & R \end{array}$$

- Que se passe-t-il si U et I sont connues à une incertitude près (ex : $U \pm \Delta U$) ?

$\hookrightarrow$ souhait d'évaluer la sensibilité de $f(U, I)$ par rapport à $U, \Delta U, I, \Delta I$.

Cas général

Considérons

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

et on rappelle :

$$\begin{array}{rcl} f(x_0 + h_x; y_0 + h_y) & = & f(x_0, y_0) \\ & + & \dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_x + \dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_y \\ & + & \mathcal{R}(h_x, h_y) \end{array}$$

avec $\lim\limits_{(h_x,h_y)\to 0} \mathcal{R}(h_x, h_y) = 0$.

Cas général (suite)

On propose alors :

$$|f(x_0 + h_x; y_0 + h_y) - f(x_0, y_0)| \leq \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right| \cdot |h_x| + \left|\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right| \cdot |h_y|$$

Exemple de $f(U, I) = R$

$$\begin{aligned} |f(U + \Delta U; I + \Delta I) - f(U, I)| &\leq \left|\frac{\partial f}{\partial U}(U, I)\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{\partial f}{\partial I}(U, I)\right| \cdot |\Delta I| \\ &\leq \left|\frac{1}{I}\right| \cdot |\Delta U| + \left|\frac{-U}{I^2}\right| \cdot |\Delta I| \end{aligned}$$

Discussion

- Le signe de ΔU et ΔI a-t-il un sens ?
- Erreur et incertitude...

Discussion

- Le signe de ΔU et ΔI a-t-il un sens ?
- Erreur et incertitude...

Cas d'un produit

Un cas particulier (mais relativement courant) est celui où la fonction qui nous intéresse est un produit de la forme (par exemple) :

$$f(x, y, z) = x^\alpha \, y^\beta \, z^\gamma$$

Alors on a :

$$\ln f(x, y, z) = \alpha \ln x + \beta \ln y + \gamma \ln z$$

et ainsi, en calculant la dérivée partielle par rapport à x :

$$\frac{1}{f} \frac{\partial f}{\partial x} = \alpha \, \frac{1}{x}$$

et de même pour y et z.

Notons alors :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \cdot \Delta z$$

D'après les calculs précédents, on obtient :

Cas d'un produit

Pour $f(x, y, z) = x^{\alpha}\, y^{\beta}\, z^{\gamma}$ on a

$$\frac{\Delta f}{f} = \alpha\, \frac{\Delta x}{x} + \beta\, \frac{\Delta y}{y} + \gamma\, \frac{\Delta z}{z}$$

et on propose finalement, en notant
$E = f(x + \Delta x,\, y + \Delta y,\, z + \Delta z) - f(x, y, z)$:

$$\begin{aligned} |E| &\leq \left|\frac{\Delta f}{f}\right| \\ &\leq |\alpha| \left|\frac{\Delta x}{x}\right| + |\beta| \left|\frac{\Delta y}{y}\right| + |\gamma| \left|\frac{\Delta z}{z}\right| \end{aligned}$$

Exemples

$$\begin{aligned} f(U,I) &= U/I \\ f(n,T,V) &= (nRT)/V \\ f(R,I) &= RI^2 \end{aligned}$$

Dérivées d'ordre plus élevé

Considérons par exemple :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

On a vu que l'on pouvait, sous certaines conditions sur f, calculer $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$.
On peut considérer cette fonction elle-même comme une fonction :

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \end{array}$$

Les dérivées partielles de g sont alors les dérivées d'ordre 2 de f.

Notations :

$$\frac{\partial g}{\partial x} =$$
$$\frac{\partial g}{\partial y} =$$

et on peut ensuite considérer les dérivées partielles d'ordre 2 de g, qui seront les dérivées partielles d'ordre 3 de f, etc. (sous certaines hypothèses sur f).

Notations :

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= \\ \frac{\partial g}{\partial y} &= \end{aligned}$$

et on peut ensuite considérer les dérivées partielles d'ordre 2 de g, qui seront les dérivées partielles d'ordre 3 de f, etc. (sous certaines hypothèses sur f).

Muni de ces notions, on peut écrire une nouvelle formule d'approximation.

Formule de Taylor à l'ordre 2

Soit f une fonction dite de classe $\mathcal{C}^2$ (différentiable et dont la différentielle est elle-même différentiable) :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x,y) & \mapsto & f(x,y) \end{array}$$

alors

$$\begin{aligned} f(x_0 + h_x,\ y_0 + h_y) &= f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot h_x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot h_y \\ &+ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_x^2}{2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_x\, h_y}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_y^2}{2} \\ &+ o(h_x^2 + h_y^2) \end{aligned}$$

Points critiques

En utilisant cette formule, on identifie la notion suivante :

Points critiques

Soit une fonction différentiable

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ (x, y) & \mapsto & f(x, y) \end{array}$$

On dit que (x_0, y_0) est un point critique de f lorsque

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) &= 0 \end{aligned}$$

Notons :

$$H = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_x^2}{2} + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_x\, h_y}{2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \cdot \frac{h_y^2}{2}$$

Extrémum d'une fonction de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$

Une fonction f de classe $\mathcal{C}^2$ admet un extrémum en un point $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ lorsque

- (x_0, y_0) fait partie du domaine de définition de f ;
- (x_0, y_0) est un point critique de f ;
- la quantité $H(x_0, y_0)$ est de signe constant quels que soient h_x et h_y.

remarque : mais pas seulement dans ce cas...

Notons (selon Monge (1746-1818)) :

$$\begin{aligned} r &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) \\ s &= \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \\ t &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \end{aligned}$$

et on a donc

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2}\left(r\, h_x^2 + 2\, s\, h_x h_y + t\, h_y^2\right) \\ &= \frac{1}{2} r \left(\left(h_x + \frac{s}{r} h_y\right)^2 + \frac{h_y^2}{r^2}\left(tr - s^2\right)\right) \end{aligned}$$

On a donc les critères suivants :

- Si $tr - s^2 > 0$ alors f admet un extrémum strict en (x_0, y_0). Il s'agit d'un maximum si $r < 0$, et d'un minimum si $r > 0$.
- Si $tr - s^2 < 0$ alors le point (x_0, y_0) n'est pas un extrémum de f (on dit que c'est un point selle, ou un point col).
- Et si $tr - s^2 = 0$?
- Et si $r = 0$ ou $t = 0$?
- Et si $r = s = t = 0$?

On a donc les critères suivants :

- Si $tr - s^2 > 0$ alors f admet un extrémum strict en (x_0, y_0). Il s'agit d'un maximum si $r < 0$, et d'un minimum si $r > 0$.
- Si $tr - s^2 < 0$ alors le point (x_0, y_0) n'est pas un extrémum de f (on dit que c'est un point selle, ou un point col).

- Et si $tr - s^2 = 0$?
- Et si $r = 0$ ou $t = 0$?
- Et si $r = s = t = 0$?

Conclusion

Si l'on cherche les extrémums d'une fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, alors :

- On cherche les points critiques (les endroits où les dérivées partielles s'annulent) ;
- On calcule la valeur de s, r et t en ces points ;
- On calcule $tr - s^2$ et on conclut... si on peut !

Le mot de la fin

Bon courage !