LOIS de PROBABILITES

1 - Sur 2000 familles ayant 4 enfants chacune, quel est le nombre de familles ayant :

a) un garçon,

b) deux garçons,

c) une ou deux filles,

d) aucune fille,

e) au moins un garçon,

(On suppose que la probabilité de la naissance d'un garçon est 1/2).

a) $P(1G) = P_1 = C_4^1\, p^1\, q^{4-1}$ avec $p = q = \frac{1}{2}$

$$= \frac{4!}{1!\ (4-1)!}\ \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^3 = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = 4\ \frac{1}{16} = \frac{1}{4}.$$

$\boxed{n(1G)} = 2000 \cdot \frac{1}{4} = \boxed{500\ \text{familles}}$.

b) $P(2G) = P_2 = C_4^2\, p^2\, q^{4-2}$

$$= \frac{4!}{2!\ (4-2)!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{4.3.}{2.}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{12}{2}\ \frac{1}{16} = \frac{3}{8}.$$

$\boxed{n(2G)} = 2000 \cdot \frac{3}{8} = \boxed{750\ \text{familles}}$.

c) $P(1 \text{ ou } 2\ F) = P(3G) + P(2G)$

$$P(3G) = C_4^3\, p^3\, q^1 = \frac{4!}{3!\ \ 1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3 \frac{1}{2} = 4\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{4}{16} = \frac{1}{4}.$$

$$P(1 \text{ ou } 2F) = \frac{1}{4} + \frac{3}{8} = \frac{2+3}{8} = \frac{5}{8}.$$

$\boxed{n(1 \text{ ou } 2F)} = 2000 \cdot \frac{5}{8} = \boxed{1250\ \text{familles}}$.

d) $P(0F) = P(4G)$

$$= C_4^4\, p^4\, q^0 = \frac{4!}{4!\ \ 0!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}.$$

$\boxed{n(4G)} = 2000 \cdot \frac{1}{16} = \boxed{125\ \text{familles}}$.

e) $P(\geq 1G) = 1 - P(0G)$.

$$P(0G) = C_4^0\, p^0\, q^4 = \frac{4!}{0!(4-0)!}\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}.$$

$P(\geq 1G) = 1 - \dfrac{1}{16} = \dfrac{15}{16}$.

$\boxed{n(\geq 1G)} = 2000 \cdot \dfrac{15}{16} = \boxed{1875 \text{ familles}}$.

2 - La taille moyenne de 500 élèves de petites classes d'un lycée est 150 cm et l'écart-type 15 cm. En supposant que la taille soit distribuée suivant une loi normale, trouver :

a) Combien d'élèves ont leur taille comprise entre 120 et 155 cm ?

b) Combien d'élèves mesurent plus de 185 cm ?

c) Combien d'élèves mesurent moins de 128 cm ?

Loi normale

$m = 150 \text{ cm} \qquad \sigma = 15 \text{ cm}$

a) $P(120 \leq x < 155) = P\left(\dfrac{120 - 150}{15} \leq t < \dfrac{155 - 150}{15}\right)$

$= P(-2 \leq t < 0{,}333) = \int_{-2}^{0,333} y(t)\, dt = \int_{-2}^{0} y(t)\, dt + \int_{0}^{0,333} y(t)\, dt$

$= \int_{0}^{2} y(t)\, dt + \int_{0}^{0,333} y(t)\, dt = \phi(2) + \phi(0{,}333)$

$= 0{,}4772 + 0{,}1293 = 0{,}6065.$

$\boxed{n} = 500 \cdot 0{,}6065 = 303{,}25 \approx \boxed{303 \text{ familles}}$.

b) $P(x > 185) = P\left(t > \dfrac{185 - 150}{15}\right) = P(t > 2{,}333) = \int_{2,333}^{+\infty} y(t)\, dt$

$= \int_{0}^{+\infty} y(t)\, dt - \int_{0}^{2,333} y(t)\, dt = 0{,}5 - \phi(2{,}333) = 0{,}5 - 0{,}4901 = 0{,}0099$

$\boxed{n} = 500 \cdot 0{,}0099 = 4{,}95$ soit $\boxed{4 \text{ familles}}$.

c) $P(x < 128) = P\left(t < \dfrac{128 - 150}{15}\right) = P(t < -1{,}467) = \int_{-\infty}^{-1,467} y(t)\, dt = \pi(-1{,}467)$

ou $= \int_{-\infty}^{0} y(t)\, dt - \int_{0}^{1,467} y(t)\, dt = 0{,}5 - \phi(1{,}467) = 0{,}5 - 0{,}4279 = 0{,}0721$

$\boxed{n} = 500 \cdot 0{,}0721 = 36{,}05$ soit $\boxed{36 \text{ familles}}$.

TESTS de χ^2 (CHI2)

1 - On a déterminé le quotient intellectuel Q.I. de 400 enfants âgés de 12 ans. On a obtenu la distribution statistique suivante :

Q.I.	Effectifs
[67,5 - 72,5 [	1
[72,5 - 77,5 [	9
[77,5 - 82,5 [	14
[82,5 - 87,5 [	26
[87,5 - 92,5 [	51
[92,5 - 97,5 [	64
[97,5 - 102,5 [	73
[102,5 - 107,5 [	68
[107,5 - 112,5 [	53
[112,5 - 117,5 [	30
[117,5 - 122,5 [	8
[122,5 - 127,5 [	3

a) Calculer la moyenne m, la variance V et l'écart-type de cette distribution.

b) Peut-on considérer, au risque de 5 %, que l'hypothèse de distribution normale $\mathcal{N}$ (m, σ) est acceptable ?

a)

Centre de classe x_i	***Effectif n_i***	***$n_i x_i$***	***$n_i x_i^2$***
70	*1*	*70*	*4 900*
75	*9*	*675*	*50 625*
80	*14*	*1 120*	*89 600*
85	*26*	*2 210*	*187 850*
90	*51*	*4 590*	*413 100*
95	*64*	*6 080*	*577 600*
100	*73*	*7 300*	*730 000*
105	*68*	*7 140*	*749 700*
110	*53*	*5 830*	*641 300*
115	*30*	*3 450*	*396 750*
120	*8*	*960*	*115 200*
125	*3*	*375*	*46 875*
	$\Sigma n_i = 400$	$\Sigma n_i x_i =$ 39 800	$\Sigma n_i x_i^2 =$ 4 003 500

Echantillon important : $N = 400$.

Moyenne : $\boxed{m} = \dfrac{\sum_i n_i x_i}{N} = \dfrac{39\ 800}{400} = \dfrac{398}{4} = \boxed{99{,}5}$.

Variance : $\boxed{V} = \dfrac{\sum_i n_i x_i^2}{N} - m^2 = \dfrac{4\ 003\ 500}{400} - (99{,}5)^2 = 10\ 008{,}75 - 9900{,}25 = \boxed{108{,}5}$.

Ecart-type : $\boxed{\sigma} = \sqrt{V} = \boxed{10{,}42}$.

b) *Test de χ^2 de conformité à une distribution de Gauss.*

$\underline{H_0}$: La distribution expérimentale suit une loi normale (de Gauss) $\mathcal{N}(99{,}5\ ;\ 10{,}42)$.
(hypothèse à vérifier)

Variable réduite : $t = \dfrac{x - m}{\sigma} = \dfrac{x - 99{,}5}{10{,}42}$

$n_{th} = N \,.\, P_{th}$. *avec $N = 400$.*

		t	$\phi\,(t)$	P_{th}	n_{th}
	67,5	*- 3,071*	*0,4989*	*0,0011*	*0,44*
				0,0037	*1,48*
	72,5	*- 2,591*	*0,4952*		
				0,0126	*5,04*
	77,5	*-2,111*	*0,4826*		
				0,0342	*13,68*
	82,5	*-1,631*	*0,4484*		
				0,0735	*29,4*
	87,5	*-1,152*	*0,3749*		
				0,1263	*50,52*
	92,5	*-0,672*	*0,2486*		
				0,1733	*69,32*
	97,5	*-0,192*	*0,0753*		
m —				*0,1894*	*75,76*
	102,5	*0,288*	*0,1141*		
				0,1653	*66,12*
	107,5	*0,768*	*0,2794*		
				0,1150	*46*
	112,5	*1,248*	*0,3944*		
				0,0638	*25,52*
	117,5	*1,727*	*0,4582*		
				0,0282	*11,28*
	122,5	*2,207*	*0,4864*		
				0,0100	*4*
	127,5	*2,687*	*0,4964*		
				0,0036	*1,44*
					$\Sigma\, n_{th} = 400$

Test de χ^2 *:*

Conditions à vérifier : $N > 50$
$n_{classe} > 5$

=> *regroupement des classes extrêmes.*

Formule de $\chi^2 = \sum_i \frac{(n_i - n_{th})^2}{n_{th}}$

Centre de classe x_i	**Effectif expérimental** n_i		**Effectif théorique** n_{th}		$\dfrac{(n_i - n_{th})^2}{n_{th}}$
<70 ; 70	*1*	*10*	*1,92*	*6,96*	*1,328*
75	*9*		*5,04*		
80	*14*		*13,68*		*0,007*
85	*26*		*29,4*		*0,393*
90	*51*		*50,52*		*0,005*
95	*64*		*69,32*		*0,408*
100	*73*		*75,76*		*0,101*
105	*68*		*66,12*		*0,053*
110	*53*		*46,00*		*1,065*
115	*30*		*25,52*		*0,786*
120	*8*	*11*	*11,28*	*16,72*	*1,957*
125 ; >125	*3*		*5,44*		
					$\chi^2 = 6{,}103$

Nombre de degrés de liberté :

$\nu = k - 1 - r$ *avec* $k = 10$ *(nombre de classes après regroupement)*

$r = 2 \quad (m \,;\, \sigma)$

$= 10 - 1 - 2 = 7$

Au risque 5 %, la lecture de la table de χ^2 *donne :* $\chi_0^2 = 14{,}07$.

$\chi^2 << \chi_0^2$ =>   *Au risque de 5 % de se tromper, l'hypothèse* H_0 *est acceptable : la distribution suit la loi normale* $\mathcal{N}(99{,}5 \,;\, 10{,}42)$.